Открытые и замкнутые множества

Данный материал предназначен для подготовки к семинару, а также для самопроверки изученного материала по теме «Открытые и замкнутые множества» в рамках курса «Многомерный анализ, интегралы и ряды», изучаемого в МФТИ. К семинару следует выучить и понять определения из списка ниже, знать формулировки и изучить доказательства теорем по данному разделу, а также желательно проверить себя, прорешав контрольные вопросы. Задачи предлагаются для более детальной подготовки и изучения темы. Помните, чем лучше вы подготовитесь к семинару, тем более детально мы сможем изучить тему. На семинаре будет проведена либо устная, либо письменная проверка знания теоретического материала.

Определения и базовые понятия

- Евклидово пространство
- Неравенство треугольника
- (Открытый) шар
- Внутренняя точка
- Точка прикосновения
- Открытое множество
- Замкнутое множество
- Граничная точка
- Граница множества
- (Линейная) связность
- Внутренность множества

Контрольные вопросы

1. Доказать, что объединение любого числа открытых можеств открыто.

2. Доказать, что конечное пересечение открытых множеств открыто.

3. Привести пример семейства открытых множеств, пересечение которых не открыто.

4. Привести пример семейства открытых множеств, пересечение которых образует отрезок $[a, b]$.

5. Доказать, что пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто.

6. Доказать, что конечное объединение замкнутых множеств замкнуто.

7. Является ли множество, состоящее из одной точки открытым?

8. Является ли множество, состоящее из одной точки замкнутым?

9. Привести пример семейства замкнутых множеств, объединение которых не замкнуто.

10. Привести пример семейства замкнутых множеств, объединение которых образует интервал (a, b).

11. Привести пример множества, которое не является ни открытым, ни замкнутым.

12. Докажите, что множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои граничные точки.

13. Докажите, что множество открыто тогда и только тогда, когда оно не содержит ни одной своей граничной точки.

14. Докажите, что множество открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто.

15. Докажите, что множество замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.

16. Является ли предельная точка точкой прикосновения?

17. Является ли точка прикосновения предельной точкой?

18. Является ли граничная точка предельной точкой?

Задачи

1. Пусть O – открытое множество, а C – замкнутое. Докажите, что множество $X = O \setminus C$ открытое.

2. Пусть O – открытое множество, а C – замкнутое. Докажите, что множество $X = C \setminus O$ замкнутое.

3. Является ли замкнутым множество $\{1/n \mid n > 0\}$?

4. Носителем последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется множество X, состоящее из элементов последовательности. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходящаяся последовательность. Следует ли отсюда, что её носитель X не является замкнутым множеством?

5. Носителем последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется множество X, состоящее из элементов последовательности. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_0 \notin X$. Следует ли отсюда, что её носитель X не является замкнутым множеством?

6. Приведите пример открытого множества $X \subseteq \mathbb{R}^2$, такого что $\operatorname{Int} X \neq \operatorname{Int} \overline{X}$.

7*. Докажите, что замыкание множества X совпадает с пересечением всех открытых множеств, содержащих X:

$$\overline{X} = \bigcap_{X \subseteq O_\alpha} O_\alpha.$$

8*. Докажите, что любое открытое множества O представимо в виде объединения всех своих замкнутых подмножеств:

$$O = \bigcup_{C_\alpha \subset O} C_\alpha.$$