

Последовательности

Данный материал предназначен для подготовки к семинару, а также для самопроверки изученного материала по теме «Последовательности» в рамках курса «Введение в математический анализ», изучаемого в МФТИ. К семинару следует выучить и понять определения из списка ниже, знать формулировки и изучить доказательства теорем по данному разделу, а также желательно проверить себя, прорешав контрольные вопросы. Задачи предлагаются для более детальной подготовки и изучения темы. Помните, чем лучше вы подготовитесь к семинару, тем более детально мы сможем изучить тему. На семинаре будет проведена либо устная, либо письменная проверка знания теоретического материала.

Определения

- Последовательность
- Предел последовательности
- ε -окрестность
- ε -окрестность бесконечности
- Сходящаяся последовательность
- Ограниченное множество
- Ограниченная последовательность
- (Точные) верхняя и нижняя грани множеств и последовательностей
- Монотонная последовательность
- Подпоследовательность
- Частичный предел
- Верхний и нижний предел

Контрольные вопросы

1. Приведите пример сходящейся последовательности.
2. Приведите пример расходящейся последовательности.
3. Верно ли, что если множество, состоящее из значений элементов последовательности конечно, то последовательность ограничена?
4. Верно ли, что если последовательность ограничена, то множество её значений конечно?
5. Приведите пример расходящейся последовательности, множество значений элементов которой конечно.
6. Приведите пример последовательности, которая имеет ровно два частичных предела. Является ли эта последовательность сходящейся?
7. Приведите пример неограниченной последовательности.
8. Приведите пример бесконечно большой последовательности.
9. Может ли неограниченная последовательность быть сходящейся?
10. Может ли бесконечно большая последовательность быть сходящейся?

Задачи

1. Может ли неограниченная последовательность не быть бесконечно большой?
2. Верно ли, что если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то любая её подпоследовательность ограничена?
3. Верно ли, что если для числа a существует такая последовательность $\{x_n\}$, что $|x_n| \rightarrow a$, то найдётся расходящаяся последовательность y_n , такая что $|y_n| \rightarrow a$?
4. Пусть последовательность $\{x_n\}$ получена из сходящейся последовательности $\{a_k\}$ путём перенумерации её элементов, то есть $x_n = a_{f(n)}$ и $a_k = x_{f^{-1}(k)}$. Верно ли, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$?
5. Пусть X – множество значений последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящейся к x . Верно ли, что занумеровав элементы X произвольным образом, можно получить последовательность $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящуюся к x ?