

Задание 8

Замкнутость КС-языков

Ключевые слова¹: язык, контекстно-свободный язык, магазинный автомат, грамматика, метод математической индукции.

1 Лемма о накачке

Одна из целей изучения леммы о накачке для регулярных языков – упрощение понимания леммы о накачке для КС-языков, где она уже жизненно необходима. Сформулируем лемму.

Лемма 1. Для любого КС-языка L существует константа p , такая что для любого слова w из языка L , такого что $|w| \geq p$ существует разбиение слова $w = xuyvz$, причём

- $|uyv| \leq p$
- $|uv| \geq 1$
- $\forall i \geq 0 : w_i = xu^i y v^i z \in L$

Пример 1. Язык $L = a^n b^n c^n$ не является КС-языком.

Доказательство. Предположим, что $L \in \text{CFL}$, тогда для некоторого числа p выполнена лемма о накачке. Рассмотрим слово $w = a^p b^p c^p$ (заметим, что число p является параметром, а не каким-то конкретным числом). Тогда подслово uyv из разбиения слова w , существующего по лемме о накачке, либо состоит из одинаковых букв (a^l или b^l или c^l) или имеет вид $a^l b^r$ или $b^l c^r$. Три различные буквы подслово uyv содержать не может, поскольку его длина ограничена числом p . Но тогда uv – слово, в котором нет одной из трёх букв. Пусть это будет буква c для определённости. Взяв $i = 0$, получаем, что по лемме о накачке $w_0 = a^{n-k} b^{n-m} c^n \in L$, при этом $k + m \geq 1$, откуда следует, что слово w_0 не принадлежит языку L . \square

¹минимальный необходимый объем понятий и навыков по этому разделу)

Упражнение 1. Покажите, что КС-языки замкнуты относительно объединения.

Упражнение 2. Покажите, что КС-языки не замкнуты относительно пересечения.

Упражнение 3. Покажите, что КС-языки не замкнуты относительно дополнения.

Задача 1. Покажите, что КС-языки замкнуты относительно пересечения с регулярными. То есть, если $L \in \text{CFL}$, $R \in \text{REG}$, то $L \cap R \in \text{CFL}$.

Задача 2*. Решите предыдущую задачу используя представление КС-языка не МП-автоматом, а грамматикой.

Указание: пусть регулярный язык задан конечным автоматом, тогда постройте грамматику G' для языка $L \cap R$, используя грамматику G , порождающую язык L , которая будет иметь нетерминалы вида $[qXp]$, где $q \in Q_A$, $X \in N_G$.

Задача 3. Докажите, что язык $\{w \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\} \subseteq \{a, b, c\}^*$ не является КС-языком.

Задача 4. Докажите, что дополнительный язык к языку $U = \{a^n b^n c^n \mid n = 0, 1, \dots\}$ является КС-языком.²

Задача 5. Верно ли, что язык $\{a^n b^m b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$ является КС-языком? В случае положительного ответа построить КС-грамматику или МП-автомат для данного языка.

Задача 6. Докажите, что язык $\{w \mid w = uu, u \in \Sigma^*\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, не является КС-языком.

²Так как сам язык U не является КСЯ, то это означает, что в отличие от регулярных языков множество КСЯ не замкнуто относительно дополнения.