

Задание 6

Контекстно-свободные языки

Ключевые слова¹: язык, регулярный язык, регулярное выражение, уравнения с регулярными коэффициентами, контекстно-свободный язык, грамматика, метод математической индукции.

1 Задачи

Задача 1. Решите уравнения с регулярными коэффициентами. В каждом пункте нужно выполнить три задания:

- 1) найти частное решение;
- 2) найти решение, минимальное по включению;
- 3) найти все решения.

1. $X = ((101)^* + 110^*)X;$

2. $X = (00 + 01 + 10 + 11)X + (0 + 1 + \varepsilon);$

3.
$$\begin{cases} Q_0 = Q_00 + Q_11 + \varepsilon \\ Q_1 = Q_01 + Q_20 \\ Q_2 = Q_10 + Q_21. \end{cases}$$

Определение 1. Грамматика называется линейной, если в правые части правил вывода входит не более одного нетерминала.

Задача 2. Верно ли, что для любой линейной грамматики G , $L(G) \in \text{REG}$?

Задача 3. Язык $L^=$ является языком всех слов с равным числом символов a и b .

¹минимальный необходимый объем понятий и навыков по этому разделу)

1. Покажите индукцией² по длине слова, что КС-грамматика с правилами $S \rightarrow SS \mid aSb \mid bSa \mid \varepsilon$ порождает язык $L^=$.
2. Покажите, что язык $L^=$ не порождается никакой линейной КСГ.

Определение 2. Палиндромами называют слова, которые одинаково читаются слева-направо и справа-налево, например, «ротор».

На семинаре мы показали, что язык палиндромов является КС-языком.

Задача 4. Покажите, что язык всех непалиндромов (то есть дополнение языка палиндромов) является КС-языком.

Ещё раз напоминаю, что задачи, помеченные \dagger являются дополнительными, поэтому списывать их из книжек – бессмысленное увеличение энтропии.

Определение 3. Для языка $L \subseteq \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}^* = \Sigma_n^*$ и языков $L_{\sigma_1}, L_{\sigma_2}, \dots, L_{\sigma_n} \subseteq \Sigma_n^*$, подстановкой в L языков $L_{\sigma_1}, \dots, L_{\sigma_n}$ назовём язык L' , такой что для всех слов $w = w[1] \dots w[n]$ из языка L справедливо $L_{w[1]}L_{w[2]} \dots L_{w[n]} \subseteq L'$

Задача 5[†]. Доказать, что регулярные языки замкнуты относительно операции подстановки.

Определение 4. Даны алфавиты Σ и Δ . Для языка $L \subseteq \Sigma \times \Delta$ определены операции проекции на Σ^* и Δ^* . Проекцией L на Σ^* называется язык $L_\Sigma = \{w \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Delta^* : (w, v) \in L\}$. Проекция L на Δ^* определяется аналогичным образом.

Задача 6[†]. Доказать, что регулярные языки замкнуты относительно операции проекции.

Определение 5. Для языка $L_\Sigma \subseteq \Sigma^*$, Δ -цилиндром называется язык L , такой что $L = \{w \mid w = (u, v), u \in L_\Sigma, v \in \Delta^*\}$

Задача 7[†]. Показать, что Σ -проекция Δ -цилиндра L есть L . Доказать, что регулярные языки замкнуты относительно операции цилиндра.

²Другие доказательства, кроме индукции, не принимаются.