Задание 2
НКА и алгоритмы поиска подстрок

Литература:

1. *Хопкрофт Д., Мотвани Р., Ульман Д.*
   Введение в теорию автоматов, языков и вычислений.
   М.: Вильямс, 2002.

2. *Ахо А., Ульман Д.*
   Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции
   М.: Мир, 1978. Гл. 0, 2.

3. *Серебряков В.А., Галочкин М.П., Гончар Д.Р., Фуругян М.Г.*
   Теория и реализация языков программирования.
   М.: МЗ-пресс, 2006.

4. *Шень. А. Х.*
   Программирование: теоремы и задачи
   М.: МЦНМО, 2004.

5. *Журавлёв Ю.И., Флёров Ю.А, Вялый М.Н.*
   Дискретный Анализ. Формальные системы и алгоритмы.
   М.: МЗ-пресс, 2010.

Ключевые слова[1]: *язык, регулярные выражения, конкатенация, объединение, итерация, конечные автоматы (КА), детерминированные и недетерминированные КА, регулярные языки.*

Упражнения из этого задания не обязательно техать и присылать: они не оцениваются. Их стоит техать, если вы хотите получить обратную связь. Задачи, помеченные звёздочкой, являются необязательными, но их решение сильно поощряется бонусными очками.

1 Построение по регулярному выражению конечного автомата

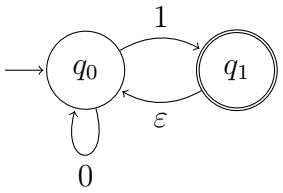
На семинаре мы разобрали алгоритм построения детерминированного конечного автомата по регулярному выражению. Однако, его нельзя на-

[1] минимальный необходимый объём понятий и навыков по этому разделу)

звать простым. Построить недетерминированный автомат по регулярному выражению гораздо проще. В каком-то смысле, если вы имеете дело с регулярным выражением, вы имеете дело с НКА.

Напомним, что помимо обычных переходов недетерминированные автоматы, имеют также ε-переходы, т.е. переходы вида $\delta(q_i, \varepsilon) = q_j$. Наличие таких переходов означает, что попав в состояние q_i, автомат может перейти в состояние q_j не обрабатывая следующий символ слова.

Пример 1.



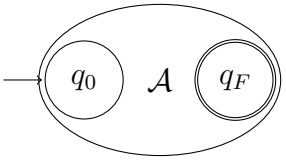
Легко видеть, что данный автомат принимает язык, состоящий из слов, оканчивающихся на 1. При прочтении 1, автомат переходит из состояния q_0 в q_1, дальше, если во входном слове ещё остались необработанные символы, автомат делает ε-переход из состояния q_1 в q_0 и продолжает обработку слова.

Для построения НКА по РВ будем использовать определение регулярного языка. Напомним определение класса регулярных языков REG.

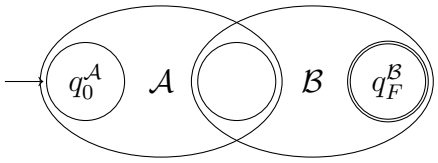
- $\varnothing \in \mathsf{REG}$.
- $\forall \sigma \in \Sigma : \ \{\sigma\} \in \mathsf{REG}$.
- $\forall X, Y \in \mathsf{REG} \ : \ X \cdot Y, \ X|Y, \ X^* \in \mathsf{REG}$.
- Больше нет регулярных языков.

Мы будем строить НКА по РВ из каждого пункта данного определения. С первыми двумя пунктами проблем нет – их я оставляю как лёгкое упражнение. Перейдём сразу к третьему пункту. Допустим уже построены автоматы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ для регулярных языков X и Y соответственно. Мы будем предполагать, что оба автомата имеют всего одно принимающее состояние. Если в автомате несколько принимающих состояний, то можно построить эквивалентный ему автомат с единственным принимающим

состоянием, добавив к множеству состояний состояние q_F, которое будет единственным принимающим, и добавив ε-переходы в q_F из старого множества F: $\forall q \in F : \delta(q, \varepsilon) = q_F$. Будем схематично обозначать автоматы эллипсами, и помечать в них только начальное и принимающее состояние. Таким образом, автомат $\mathcal{A}$ имеет вид



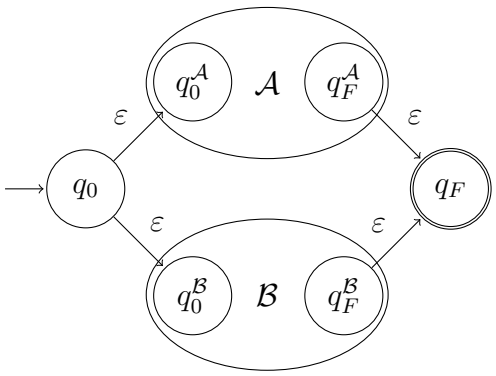
В дальнейшем, мы будем предполагать, что начальное состояние на схеме находится слева, а принимающее справа. Построим явно автомат распознающий $X \cdot Y$, $L(\mathcal{A}) = X, L(\mathcal{B}) = Y$.



Для этого по автомату $\mathcal{A}$ распознающему язык X и автомату $\mathcal{B}$, распознающему язык Y мы строим автомат, распознающий $X \cdot Y$ объединяя множества состояний $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ так, что $q_0 = q_0^{\mathcal{A}}$, $q_F^{\mathcal{A}} = q_0^{\mathcal{B}}$, $F = \{q_F^B\}$. Опять получили автомат с единственным принимающим состоянием.

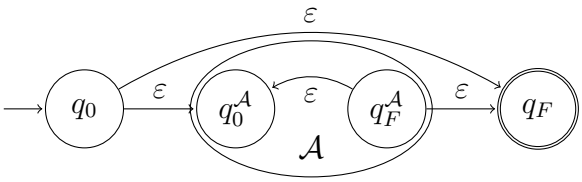
Упражнение 1. Доказать, что построенный автомат распознаёт язык $X \cdot Y$.

Для построения языка $X|Y$ используем следующую конструкцию:



Упражнение 2. Доказать, что построенный автомат распознаёт язык $X|Y$.

И наконец перейдём к построению автомата для языка X^*:

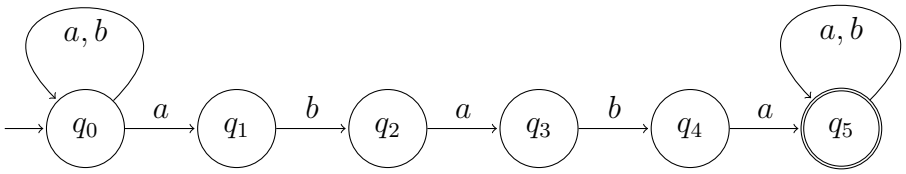


Упражнение 3. Доказать, что построенный автомат распознаёт язык X^*.

Задача 1. Постройте НКА по регулярному выражению $a((a|b)b)^*$.

2 Распознавание текстов

С помощью НКА можно легко описать язык, в который входят все слова, содержащие в качестве подслова некоторое слово. Например, следующий автомат распознаёт слова, содержащие подслово *ababa*.



Задача 2*. Докажите, что по НКА данного вида ($\Sigma^* w \Sigma^*$) можно построить ДКА, число состояний которого не превосходит $|w| + 1$.

Задача 3. Постройте НКА, распознающий слова, в которых есть хотя бы одно из подслов $abab, abb, abaa$.

3 Детерминированный конечный автомат

В этом разделе представлены задачи на построение автоматов и изучение свойств ДКА. В случае, когда речь идёт об автомате $\mathcal{A}$, для сокращения записи мы будем подразумевать, что данный автомат задан набором

$$\mathcal{A} = (Q_{\mathcal{A}},\ \Sigma,\ q_0^{\mathcal{A}},\ \delta_{\mathcal{A}},\ F_{\mathcal{A}}).$$

Задача 4. Постройте ДКА, который

1) распознаёт язык, все слова которого содержат чётное число нулей;

2) распознаёт язык, все слова которого содержат нечётное число единиц;

3) распознаёт язык, все слова которого содержат чётное число нулей и нечётное число единиц.

Мы изучили алгоритм построение НКА для объединения регулярных языков, заданных НКА. Однако существует и алгоритм построения ДКА для объединения двух языков, заданных ДКА. Идея состоит в следующем. Пусть заданы ДКА $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Построим ДКА $\mathcal{C}$ следующим образом:

- $Q_{\mathcal{C}} = Q_{\mathcal{A}} \times Q_{\mathcal{B}}$;
- $q_0^{\mathcal{C}} = (q_0^{\mathcal{A}}, q_0^{\mathcal{B}})$;
- $\forall \sigma \in \Sigma : \delta_{\mathcal{C}}((q_{\mathcal{A}}, q_{\mathcal{B}}), \sigma) = (\delta_{\mathcal{A}}(q_{\mathcal{A}}, \sigma), \delta_{\mathcal{B}}(q_{\mathcal{B}}, \sigma))$;
- $F_{\mathcal{C}} = F_{\mathcal{A}} \times Q_{\mathcal{B}} \cup Q_{\mathcal{A}} \times F_{\mathcal{B}}$.

Эта конструкция называется *конструкцией произведения*. Аналогично, для пересечения двух языков мы используем ту же конструкцию, изменив последнюю строчку на

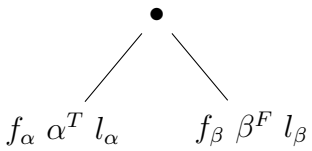
- $F_{\mathcal{C}} = F_{\mathcal{A}} \times F_{\mathcal{B}}$.

Задача 5. Постройте автомат из задачи **4(3)** используя автоматы, построенные в первых двух пунктах и конструкцию произведения.

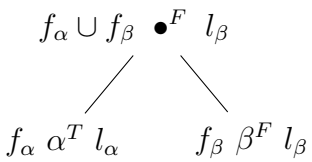
Задача 6. Как изменить конструкцию произведения, чтобы в её результате автомат $\mathcal{C}$ распозновал язык $L(\mathcal{A}) \setminus L(\mathcal{B})$ – разность языков, распознаваемых ДКА $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$?

4 О построении ДКА по РВ

На семинаре мы изучили алгоритм построения ДКА по РВ. На первом этапе мы строили дерево и вычисляли значения атрибутов *firstpos*, *lastpos* и *nullable*. Принцип вычисления этих атрибутов состоит в том, что имея значение атрибутов в дочерних узлах, мы можем вычислить атрибуты самого узла. Например для узла



атрибуты узла $\bullet$ будут



потому что регулярное выражение $\alpha \cdot \beta$ порождает слово $w = uv$, такое что РВ α порождает u, РВ β порождает v, при этом слово u может быть пустым, а слово v – нет. Отсюда, если $u \neq \varepsilon$, то w начинается с тех же символов, что и u, а значит $f_\alpha \subseteq f_\bullet$, а если $u = \varepsilon$, то w начинается с тех же символов, что и слово v, поэтому $f_\beta \subseteq f_\bullet$, отсюда $f_\bullet = f_\alpha \cup f_\beta$. Поскольку слово w имеет непустой суффикс v, порождённый f_β, то $l_\bullet = l_\beta$.

Упражнение 4. Найти алгоритм вычисления атрибутов во всех остальных случаев для узлов с операциями $\bullet$ и $|$. Если не получается придумать алгоритм, его можно найти в книге Серебрякова. Доказать корректность вычисления атрибутов.

Задача 7*. Мы рассматривали алгоритм построения ДКА по РВ, в котором не встречается пустое слово. В случае когда оно встречается, исходное РВ R может быть преобразовано либо в выражение R', либо в выражение $R' \,|\, \varepsilon$, где в выражение R' пустое слово уже не входит. Предложите алгоритм, который осуществляет такое преобразование.

Задача 8*. Мы рассматривали алгоритм построения ДКА по РВ, в котором не встречается пустое множество. В случае когда оно встречается,

исходное РВ R может быть преобразовано либо в выражение R', либо в выражение $R' \mid \varepsilon$, причём пустое множество и постое слово в выражение R' не входят. Предложите алгоритм, который осуществляет такое преобразование.

Указание: Введите новый атрибут в дерево.