ТЕСТ 2. 19.05.14

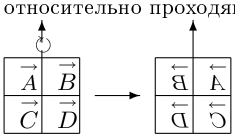
◇

ВАРИАНТ 1

1.1	1.2	1.3	2	3.1	3.2	4.1	4.2	5	6	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	7.10

Фамилия, имя Группа

1 (6 + 1 + 4 баллов). Рассмотрим рекурсивный алгоритм поворота на 180^0 квадратного изображения размером $n \times n$ пикселей относительно проходящей через его центр вертикальной оси, как показано на рисунке



Квадрат делится на 4 подквадрата размером $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ пикселей. Далее каждый подквадрат **сначала параллельным переносом сдвигается на нужное место**, а затем **РЕКУРСИВНО поворачивается на 180^0 относительно проходящей через его центр вертикальной оси**. **ВНИМАНИЕ Поворот должен осуществляется только за счет паралельного переноса (все более мелких) подквадратов**.

(i) Укажите величину сдвигов и докажите корректность процедуры. (Можно, например, показать, что после проведения всех сдвигов пикселы перейдут в нужные места.)

(ii) Обозначим $T(n)$ — время, которое требуется для поворота изображения размера $n \times n$. Приведите рекуррентную оценку для $T(n)$, оценивающую временнýю сложность алгоритма, если параллельный перенос квадрата размера $k \times k$ в заданное место экрана осуществляется за время $O(Lk \log k)$ $O(Lk^2 \log k)$, где L — это расстояние между центрами исходного и конечного положения сдвигаемого квадрата.

(iii) **Используя, если это корректно, основную теорему или дерево рекурсий**, оцените $T(n)$. Считаем n степенью двойки.

$\diamond$

2 (10 баллов). Да Нет Будем ли NP- полным язык $L = \{(Q, a, b)$, состоящий из квадратичных неравенств, имеющих решение в $\{0, 1\}$ векторах, здесь $Q \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, $a \in \mathbb{Z}^n$, $b \in \mathbb{Z}$ и $\{x \in \mathbb{R}^n \mid (Qx, x) + (b, x) + b \leq 0\} \cap \{0, 1\}^n \neq \emptyset$.

◇

3 ($5+5$ баллов). Дана выполнимая 2-КНФ φ, каждый дизъюнкт которой содержит ровно два различных литерала (литерал и его отрицание считаются различными). Будем говорить, что φ 1-*минимальна*, если к ней можно добавить один дизъюнт, содержащий два различных литерала так, чтобы она стала выполнимой.

(i) Докажите или опровергните, что следующеее условие является критерием 1-минимальности.

Рассмотрим ориентированный граф G_φ, в котором литералы и их отрицания являются вершинами, а каждый дизъюнкт порождает пару ребер вида: $x \vee y \Rightarrow [e_1 = (\neg x, y), e_2 = (\neg y, x)]$.

φ является 1-минимальной тогда и только тогда, когда в G_φ есть путь P, соединяющий противоположные литеральные вершины, $x \rightsquigarrow y$, $x = \neg y$ и имеется ребро, ведущее из вершины y в вершину $z \notin P$.

Если в указанном виде критерий не верен, то дополните его до корректного.

(ii) Постройте для задачи проверки 1-минимальности как можно более быстрый полиномиальный алгоритм.

$\diamond$

4 (7+3 балла). На оси в точках с координатами $1, 2, \ldots, n$ размещены заряженные частицы с зарядами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, соответственно, которые попарно взаимодействуют по закону Кулона $f_{ij} = \frac{q_i q_j}{(i-j)^2}$

(i) Предложите $O(n \log n)$-алгоритм для вычисления вектора $F_{left} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, где компонента f_i равна результирующей сумме сил, действующих на i-ю частицу со стороны всех частиц, расположенных от нее слева, т. е. со стороны частиц с номерами $1, 2, \ldots, i-1$.

(ii) Проведите вычисление по вашему алгоритму для системы из четырех частиц, имеющих заряды $(1, 4, 2, 5)$.

5 (10 баллов). Дана потоковая сеть и максимальный поток в ней. Пропускную способность одного из ребер увеличили на единицу. Постройте как можно более быстрый алгоритм определения максимального потока в модифицированной сети.

6 (6 **баллов).** Да Нет Является ли следующая задача NP-полной?

Дан ориентированный граф $G(V, E)$ и указаны три вершины $u, v, s \in V$. Верно ли, что в G есть простой путь из u в v, проходяший через s?

◇

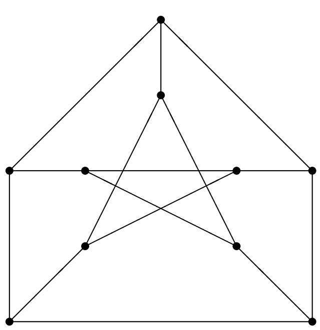
7 (10×3 **баллов).**

ВНИМАНИЕ! Правильные ответы без обоснования оцениваться не будут!

(i) Да Нет Верно ли, что проверка тавтологичности ДНФ является полиномиально полным языком в $co-\mathcal{NP}$?

(ii) Да Нет Дано n целочисленных точек плоскости. Верно ли, что любая процедура нахождения квадрата $\max(|x|,|y|) \le a$, $a \in \mathbf{N}$ с *минимальной целой стороной, содержащего не менее* 75% *точек*, требует в наихудшем случае $\Omega(n \log n)$ операций. (Арифметические операции и сравнения выполняются за единицу времени.)

(iii) Да Нет Является ли следующий граф G планарным? При положительном ответе нужно явно указать укладку графа, при отрицательном — привести препятствие Куратовского. Другие ответы не принимаются.



(iv) Из перечисленных натуральных чисел отметить все те, которые НЕ являются значениями функции Эйлера $\varphi(n)$:
$2; 6; 7; 8; 20; 51; 100; 101$

(v) Да Нет Существует ли натуральное число, имеющее показатель 32 по модулю 97?

◇

(vi) Да Нет Верно ли, что если $T(n) \leq 5T(3n) + O(n \log n)$, то $T(n) = O(n^{\log_2 5})$?

(vii) Дан полином $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x_n$ n-й степени, принимающий значения $p_0, p_1, \ldots, p_n$ в корнях из единицы $\{\exp \frac{2\pi i K}{n+1}, K = 0, 1, \ldots, n\}$. Укажите как можно более быстрый алгоритм для вычисления коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Приведите вычисления по вашему алгоритму для полинома $q(x)$ третьей степени, такого что $q(1) = -1$, $q(-1) = 2$, $q(i) = i$, $q(-i) = i - i$.

$(viii)$ Дан ориентированный граф с весами на ребрах, не имеющий контуров. Предложите как можно более быстрый алгоритм, вычисляющий минимальные по сумме весов пути от фиксированной вершины до всех остальных.

(ix) Вычислите $3^{3^{2014}} \pmod 6$.

(x) Да Нет Могут ли прямая и двойственная задачи ЛП быть несовместными? *При отрицательном ответе вы обязаны указать явный контрпример.*