ТЕСТ 1 30.03.2015 (AMB) ◇◇◇

Фамилия, имя Группа

ВАРИАНТ 3

OPEN-BOOK и NO-DEVICE

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12.1	12.2	12.3	13	14	15.1	15.2	Σ

В задачах №№ 1–6 нужно отметить (и обосновать) один из четырех вариантов ответа: 1) Да; 2) Нет; 3) Да=, если и только если $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$; 4) Да$\neq$, если и только если $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

Правильным считается ответ, использующий минимальную гипотезу.

$\mathcal{NPC}$ и $co - \mathcal{NPC}$ обозначают класс NP-полных языков и, соответственно, $co - NP$-полных языков.

Пример: рассмотрим язык двоичных записей квадратов натуральных чисел $L_{sq} = \{1, 100, 111, 1000, \dots\}$, язык 3-СОЧЕТАНИЕ, регулярный язык R и неперечислимый язык M.

Корректным ответом на вопрос: верно ли, что язык $L_{sq} \in \mathcal{NPC}$ будет “Да=”.

Корректным ответом на вопрос: верно ли, что язык 3-СОЧЕТАНИЕ$\notin \mathcal{P}$ будет “Да$\neq$”.

Корректным ответом на вопрос: верно ли, что язык $R \in \mathcal{P}$ будет “Да”.

Корректным ответом на вопрос: верно ли, что язык $M \in \mathcal{P}$ будет “Нет”.

1 (3 балла). Да Нет Да= Да$\neq$ Язык Длинное слово в регул. языке состоит из множества пар $\{(N, n)\}$, где N — кодировка НКА, n —двоичное число, такое что в языке $L(N)$ есть слово длины $\geq n$.

Верно ли, что язык Длинное слово в регул. языке$\in \mathcal{NPC}$?

2 (2 балла). Да Нет Да= Да$\neq$ Язык 2-COLOR состоит из кодировок всех графов, заданных матрицами смежности, вершины которые можно корректно окрасить в два цвета. Верно ли, что язык 2-COLOR$\in \mathcal{P}$?

3 (2 балла). Да Нет Да= Да$\neq$ Верно ли, что язык, состоящий из описаний КСГ, которые принимают бесконечные языки, принадлежит $\mathcal{NP}$?

4 (2 балла). Да Нет Да= Да$\neq$ Верно ли, что язык всех 3-КНФ, которые не являются тавтологиями принадлежит $\mathcal{NPC}$?

5 (2 балла). Да Нет Да= Да$\neq$ Верно ли, что язык $L = \{\langle D \rangle\}$, состоящий из описаний всех ДКА, которые принимают язык всех четных чисел в двоичной записи, принадлежит $\mathcal{P}$?

6 (2 балла). Да Нет Да= Да$\neq$ Верно ли, что язык всех слов является полным языком в классе $\mathcal{P}$ относительно полиномиальной m-сводимости?

7 (4 балла). Найдите Θ-асимптотику рекуррентности. $T(n) = 64\,T(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor) + \lceil \frac{n^2}{\log n} \rceil$

8 (2 балла). Да Нет Верно ли, что если $T(n) \leq 6T(4n) + O(n \log^2 n)$, то $T(n) = O(n^{\log_4 6})$?

9 (3 балла). n различных кругов на плоскости заданы центрами и радиусами. Известно, что круги вложенные, но порядок их вложения не известен.

Используя как можно меньше операций, вычислите площадь части плоскости которую покрывают ровно $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ кругов. Считаем, что элементарные арифметические операции и радикалы выполняются за единицу времени.

10 (2 балла). Постройте NP сертификат простоты для числа числа 2357. Известно, что ВСЕ первоообразные корни в сертификате можно выбрать на отрезке $[1, 10]$ и $2356 = 2^2 * 19 * 31$. По умолчанию, простыми считаются **только** числа $2, 3, 5$.

11 (6 баллов). Вычислите число слов D_k длины $k-1$ в алфавите $\{0,1,2\}$, которые не содержат подслова 01. Например, $D_3 = 8$, поскольку есть 8 слов с указанным свойством: $\{00, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22\}$.

12 (2 + 3 + 5 баллов). Дан массив $A[0, n-1]$ $n > 1$ неотрицательных чисел. Нужно найти $\min_{0\leq i<j<n}\{(A[i]) \cdot A[j]\}$ Предлагается следующая рекурсивная процедура.

Вход: $A[p, q]$, $q - p > 1$

1. Текущий массив делится на два (примерно равных): $A[p, k]$ и $A[k, q]$, $k = \lceil\frac{p+q}{2}\rceil$.
2. Рекурсивно находится минимум α искомой величины в первой половине.
3. Рекурсивно находится минимум β искомой величины во второй половине.
4. Вычисляется минимальный элемент γ в первой половие и минимальный элемент δ во второй половине.

Выход: $\min \alpha, \beta, \gamma \cdot \delta$.

Считаем, что арифметические операции выполняются за единицу времени.

(i) Напишите рекуррентную оценку сложности $T(n)$ описанного алгоритма.

(ii) Оцените $T(n)$. Можно пренебречь эффектами, связанными с округлением.

(iii) Опишите линейный алгоритм для исходной задачи, докажите его корректность.

Фамилия, имя Группа ◇◇◇

13 (5 баллов). Предлагается следующая рекурсивная процедура вычисления размера максимальной клики в графе:

Клика(G)

Вход: Граф $G(V, E)$ без петель и кратных ребер, заданный матрицей смежности.

Выход: размер максимальной клики в G.

Описание.

ЕСЛИ граф G — полный, то Клика(G) $\leftarrow |V|$,

ИНАЧЕ найти вершину $v \in V$ минимальной степени; пусть G_v — это подграф G, содержащий v и всех ее соседей.

Клика(G) $\leftarrow \max\{$Клика($G \setminus v$), Клика(G_v)$\}$.

Покажите, что число рекурсивных вызовов процедуры не превышает $|V|2^{\sqrt{2|E|}}$.

Подсказка. Покажите, что в любом графе есть вершина степени не более $\sqrt{2|E|}$.

14 (5 баллов). Да Нет Докажите или опровергните NP-полноту следующего языка: $L = \{(\langle G \rangle)\}$, здесь $\langle G \rangle$ — это описание графа, заданного матрицей смежности, имеющего $\leq \log |V|$ ребер, и хроматическое число 3.

15 ($4+1$ баллов). В больнице каждому из 169 пациентов нужно перелить по *одной дозе* крови. В наличии имеется 170 доз. Распределение по группам таково.

Группа	I	II	III	IV
В наличии	45	32	38	55
Запрос	42	39	38	50

При этом пациенты, имеющие кровь группы I, могут получать только кровь группы I. Пациенты, имеющие кровь группы II (группы III), могут получать только кровь групп I и II (групп I и III, соответственно). Наконец, пациенты с IV группой могут получать кровь любой группы.

(i) Распределите дозы, чтобы обслужить максимальное число пациентов, с помощью *решения подходящей задачи о максимальном потоке*. Решение нужно аккуратно оформлено: должна быть нарисована потоковая сеть и показаны все шаги алгоритма методам **ФФ**, начиная с нулевого потока, т. е. должны быть построены остаточные графы и показаны увеличивающие пути.

(ii) Если всех пациентов обслужить нельзя, то приведите *простое* объяснение этому, *доступное администрации* больницы.