ПРОГРАММА КУРСА
АЛГОРИТМЫ И МОДЕЛИ ВЫЧИСЛЕНИЯ

1. **Темы 1-й недели 8.02-15.02. 1 лекция.**

Примеры алгоритмов и иллюстрация принципов разработки алгоритмов: алгоритм Евклида; проверка простоты и факторизация чисел; динамическое программирование на примере задачи о рюкзаке; сортировка слиянием; индийское возведение в степень; одновременное вычисление максимального и минимального элементов в массиве; поиск ближайшей пары точек; быстрое умножение чисел и матриц: алгоритмы Карацубы и Штрассена).

2. Модели вычислений. Формальное определение алгоритма. Различные определения сложности алгоритма. Теоремы иерархии и ускорения (без доказательства).

3. **Тема 2-й недели 15.02-21.02. 2-я лекция.**

Асимптотические оценки. Нотация: $O(\cdot)$, $o(\cdot)$, $\Omega(\cdot)$, $\omega(\cdot)$, $\Theta(\cdot)$. Основная теорема о рекуррентных оценках (нахождение асимптотики рекуррентности вида $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$). Дерево рекурсии. Линейный алгоритм нахождения медианы Решение линейных рекуррентных уравнений.

4. **Тема 3–4 недель 22.02-28.02. 3 лекция.**

Класс $\mathcal{P}$. Примеры языков из $\mathcal{P}$: принадлежность слова регулярному языку; принадлежность слова КС-языку; системы линейных уравнений (полиномиальная реализация метода Гаусса). Классы NP и co-NP. Примеры языков из NP: выполнимость, простые числа; непланарные графы.

5. **Тема 4–5 недель 29.02-13.03 4–5 лекции.**

Полиномиальная сводимость. Сводимость по Карпу и по Куку (по Тьюрингу). Теорема Кука-Левина. Примеры полиномиально полных языков: выполнимость; протыкающее множество; максимальное 2-сочетание; 3-сочетание; вершинное покрытие; клика; хроматическое число; гамильтонов цикл; рюкзак; разбиение; максимальный разрез; N[ot]A[ll]E[qual]-выполнимость. PSPACE. Теорема Савича (без доказательства). Полные языки в PSPACE: истинность булевской формулы с кванторами; эквивалентность конечных автоматов.

6. **Тема 6-й недели 14.02-20.03. 6-я лекция.**

Обобщенный алгоритм Евклида. Решение линейных диофантовых уравнений. Модульная арифметика. Китайская теорема об остатках. Функция Эйлера. Первообразные корни. Кольца Z_n, в которых существуют первообразные корни. Индексы (дискретные логарифмы). Кодирование с открытым ключом. Квадратичные вычеты. Схемы RSA шифрования и цифровой подписи, дискретное логарифмирование. Протокол Диффи-Хелмана.

7. **Тема 7-й недели 21.03-27.03. 7 лекция.**

Структуры данных. Стек и очередь. Двоичная куча (пирамида). Двоичное дерево поиска и его сбалансированные вариации. Амортизационный анализ. Структура "union-find" для хранения системы непересекающихся множеств. Хеш-таблицы. Разрешение коллизий с помощью цепочек. Хеш-функции (деление с остатком, умножение). Универсальные и k-универсальные хеш-функции.

В понедельник 28.03 с 14–18 в Актовом зале и Большой химической пройдет первая курсовая контрольная работа по темам 1–7. Явка на нее обязательна.

По протоколу студенты, получившие неудовлетворительную оценку на первой или второй контрольной, не могут быть аттестованы без получения положительной оценки на последующих контрольных (как это происходит на ТРЯП). К этой группе относятся и студенты, пропустившие контрольную даже по уважительной причине.

8. **Тема 8-й недели 28.03-3.04 8-я лекция.**

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ); алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ); перемножение многочленов с помощью БПФ. Поиск подстрок. Использование БПФ для распознавания образцов. Циркулянты. Решение линейных уравнений с циркулянтными матрицами.

9. **Тема 9-й недели 4.04-10.04. 9-я лекция.**

Алгоритмы сортировки: "пузырек, "быстрая сортировка (quicksort); сортировка с помощью кучи (heapsort); сортировка слиянием (mergesort). Анализ трудоемкости алгоритма quicksort по наихудшему случаю и в среднем. Устойчивость алгоритма сортировки. Цифровая сортировка. Порядковые статистики. Нижние оценки в модели разрешающих деревьев.

10. **Тема 10-й недели и 11-й недели 11.04-24.04. 10–11-я лекции.**

Потоки и разрезы в сети. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе. Понятие остаточного графа и увеличивающего пути. Метод Форда-Фалкерсона для вычисления максимального потока и минимального разреза. Обобщения потоковой сети (пропускные способности узлов и пр.). задача о максимальном паросочетании в двудольном графе. Задача линейного программирования. Основные понятия. Выпуклые многогранники. Теорема двойственности. Задача назначении.

11. **Темы 11-й – 12-й недель 18.04-1.05. 11–12-я лекции.**

Алгоритмы на графах: поиск в ширину; поиск в глубину; определение двусвязных и/или сильносвязных компонент; топологическая сортировка. Остовные деревья: алгоритмы Прима и Краскала. Кратчайшие пути: алгоритмы Дейкстры, Флойда, Беллмана–Форда. Паросочетания.

12. **Тема 13-й недели 2.05-8.05. 13-я лекции.**

Вероятностные алгоритмы. Классы $\mathcal{RP}$, $\mathcal{BPP}$, $\mathcal{ZPP}$. Вероятностные алгоритмы: проверка простоты; вычисление медианы массива; проверка полиномиальных тождеств; поиск паросочетаний в графах; алгоритм Каргера поиска минимального разреза. Приближённые вероятностные алгоритмы поиска максимального разреза. Лемма Шварца–Зиппеля. Дерандомизация.

14. **Тема 14-й недели 9.05-15.05. 14-я лекции.**

Методы решения переборных задач: динамическое программирование, шкалирование, ветви и границы,

приближенные алгоритмы для задачи максимального разреза. ε-оптимальная процедура решения задачи о рюкзаке.

Заключительная контрольная (предположительно) понедельник 16.05.

Утешительная контрольная (предположительно) в субботу 21.05 или в понедельник 23.05.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. **[АХУ]** *Ахо А., Хопкрофт Д., Ульман Д.* Построение и Анализ Вычислительных Алгоритмов. М.: Мир, 1979.
2. **[ГД]** *Гери М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
3. **[ДПВ]** *Дасгупта С., Пападимитриу Х., Вазирани У.* Алгоритмы. М.: МЦНМО, 2014.
4. **[Кормен 1]** *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.* Алгоритмы: Построение и Анализ. М.: МЦНМО, 2002.
5. **[Кормен 2]** *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.* Алгоритмы: Построение и Анализ. (2-е изд.) М.: Вильямс, 2005.
6. **[Кормен 3]** *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.* Алгоритмы: Построение и Анализ. (3-е изд.) М.: Вильямс, 2013.
7. **[ХМУ]** *Хопкрофт Д., Мотвани Р., Ульман Д.* Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. М.,: Вильямс, 2002.
8. **[AB]** *Arora S., Barak B.* Computational Complexity: A Modern Approach. theory.cs.princeton.edu/complexity/book.pdf
9. **[GL]** *Gács P., Lovasz L.* Complexity of Algorithms. www.cs.elte.hu/∼lovasz/complexity.pdf

Дополнительная

1. *Верещагин Н., Шень А.* Вычислимые Функции. М.: МЦНМО, 1999. (Электронный вариант: www.mccme.ru/free-books)
2. **[Виноградов]** *Виноградов И.* Основы теории чисел. М.-Л.: Гостехиздат, 1952
3. *Вялый М., Журавлев Ю., Флеров Ю.* Дискретный анализ. Основы высшей алгебры. М.: МЗ Пресс, 2007.
4. **[К-Ш-В]** *Китаев А., Шень А., Вялый М.* Классические и квантовые вычисления. М.: МНЦМО-ЧеРо, 1999.
5. **[Кнут-1, Кнут-2, Кнут-3, Кнут-4] (цифра отвечает номеру тома** *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Существует несколько изданий на русском. Первое было выпущено издательством “Мир” в семидесятых. В настоящее время выпускается издательством “Вильямс”. Есть многочисленные сетевые варианты.
6. **[К-Ф]** *Кузюрин Н., Фомин С.* Эффективные алгоритмы и сложность вычислений. М.: МФТИ, 2007.
7. **[П-С]** *Пападимитриу Х., Стайглитц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы исложность. М.: Мир, 1985.
8. **[Хинчин]** *Хинчин А.* Цепные дроби. М.: Наука, 1979.
9. **[Ш]** *Шень А.* Программирование. Теоремы и задачи. М.: МЦНМО, 2007. (Электронный вариант: www.mccme.ru/free-books)
10. *Lovasz L.* Computational complexity. www.cs.elte.hu/∼lovasz/complexity.pdf

ЗАДАНИЕ

Задание состоит из списка недельных заданий (указаны даты обсуждения на семинарах и/или сдачи соответствующих задач). Каждое недельное задание состоит из четырех-пяти обязательных задач и одной-двух дополнительных задач (дополнительные задачи выделены буквой «Д»). Решение дополнительных задач не обязательно, но может быть полезно студентам, претендующим на более высокую оценку.

Обозначения

Пусть $f(n)$ и $g(n)$ — неотрицательные функции.

- $f(n) = O(g(n))$ означает, что порядок роста g при $n \to \infty$ *не меньше* порядка роста f, т. е. $\exists c > 0|$ при $n > n_0$ $f(n) \le cg(n)$;
- $f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = O(f(n))$ (порядок роста f не меньше порядка роста g);
- $f(n) = (g(n))$, если $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ (f имеет меньший порядок роста, чем g);
- $f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = o(f(n))$ (g имеет меньший порядок роста, чем f);
- $f(n) = \Theta(g(n))$, если $f(n) = O(g(n))$ и $f(n) = \Omega(g(n))$ (порядки роста f и g одинаковы).

По определению, $\log^* M = \min\{k \mid \underbrace{\log\log\ldots\log M}_{k \text{ раз}} \le 1\}$.

$\lfloor a \rfloor$ обозначает наибольшее целое, не превосходящее число a
$\lceil a \rceil$ обозначает наименьшее целое, превосходящее a

Необходимо знать какой-нибудь вывод формулы Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$ и суммы гармонического ряда $\sum_{i=1} n\frac{1}{i} = \ln n + \gamma$, где $gamma = 0.57721\ldots$ — это так называемая константа Эйлера. Кроме того, нужно знать, что такое числа Каталана $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ (c_n имеет множество комбинаторных интерпретаций, например, равно правильно построенных скобочных выражений или путей Дика длины $2n$) и выражение для их производящей функции $D(t) \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

Задание на первую неделю: 08.02–14.02 [0.1]
Примеры алгоритмов. Оценки
Раздел 1–2 программы
Литература: [Кормен 1, Введение. Глава 1] [Кормен 3, Главы 1–3], [ДПВ. Гл. 1–2]

Задача 1. (0.02). Дан массив из n элементов, на которых определено отношение равенства (например, речь может идти о массиве картинок или музыкальных записей). Постройте как можно более быстрый алгоритм, который определяет, есть ли в массиве элемент, повторяющийся не менее $\frac{n}{2}$ раз.

Задача 2. (2×0.01). Дано описание программы.

- ВХОД(x, y– натуральные числа).
- Пусть 2^{d_x}– максимальная степень 2, делящая x; d_y– определяется аналогично.
- Положим $a = x2^{-d_x}$, $b = y2^{-d_y}$.
- Поменять местами b и a, если $b < a$.
- ПОКА $b > 1$ ВЫПОЛНИТЬ
- Положим r равным тому из чисел $a+b$, $a-b$, которое делится на 4.

- Положим $a = \max(b, r2^{-d_r})$, $b = \min(b, r2^{-d_r})$, где 2^{d_r}– максимальная степень 2, делящая r.
- КОНЕЦ ЦИКЛА ПОКА
- ВЫХОД($a2^{\min(d_x,d_y)}$).

(i) Программа, если в ней исправить неточности, вычисляет известную функцию. Что эта за функция?

(ii) Оцените трудоемкость (скорректированной) процедуры (число производимых битовых операций), если x, y — n-битовые чмсла.

Задача 3. (0.02). Нужно отсортировать массив n чисел, размер которого превышает размер оперативной памяти компьютера в k раз. Предложите как можно более быструю процедуру и оцените ее трудоемкость.

Замечание 1. Адаптируйте для этой задачи сортировку слиянием с учетом вспомогательной памяти, который требует этот алгоритм.

Замечание 2. Нужно записать отсортированный массив во внешнюю память, используя как можно меньше попарных сравнений, которые можно проводить только в (быстрой) оперативной памяти.

Мы еще вернемся к этой задаче и попробуем оценить ее трудоемкость снизу.

На самом деле, даже небольшие и вполне оправданные с точки зрения конкретных практических приложений уточнения этой задачи, например, формализация обращения к быстрой и медленной памяти, может потребовать значительно больше усилий, чем кажется на первый взгляд. Если кого-то этот вопрос заинтересует, то можно порекомедовать ознакомиться с главой 5 третьего тома монографии Д. Кнута **[Кнут-3]**.

Задача 4. (3×0.02). На вход подается описания n событий в формате (s, f) — время начала и время окончания. Требуется составить расписание для человека, который хочет принять участие в максимальном количестве событий. Например, события это доклады на конфереции или киносеансы на фестивале, которые проходят в разных аудиториях. Предположим, что участвовать можно только с начала события и до конца. Рассмотрим три жадных алгоритма.

1. Выберем событие кратчайшей длительности, добавим его в расписание, исключим из рассмотрения события, пересекающиеся с выбранным. Продолжим делать то же самое далее.

2. Выберем событие, наступающее раньше всех, добавим его в расписание, исключим из рассмотрения события, пересекающиеся с выбранным. Продолжим делать то же самое далее.

3. Выберем событие, завершающееся раньше всех, добавим его в расписание, исключим из рассмотрения события, пересекающиеся с выбранным. Продолжим делать то же самое далее.

Какой алгоритм вы выберете? В качестве обоснования для каждой процедуры проверьте, что она является оптимальной (т. е. гарантирует участие в максимальном числе событий) или постройте конкретный контрпример.

Задача 5. (0.01). Найдите Θ-асимптотику числа BR_{4n+2} правильных скобочных выражений длины $4n+2$.

Задача Д–1. (0.02). Найдите явное аналитическое выражение для производящей функции чисел BR_{4n+2} (ответ в виде суммы бесконечного ряда не принимается).

Замечание: Мы еще вернемся к этой задаче и попробуем придумать общий метод решения задач такого типа.

Задание на вторую неделю: 15.02–21.02 [0.12] Оценки. Рекуррентные последовательности. Раздел 3 программы Литература: [Кормен 1, Глава 1] [Кормен 3, Главы 3–5], [ДПВ. Гл. 2]

Задача 6. ($0.02 + 0.03$).

Дана рекурсивная программа

```
функция f(n)
  if n > 1
     печать("алгоритм")
     печать("алгоритм")
     печать("алгоритм")
     f(⌊n/2⌋)
     f(⌊n/4⌋)
  endif
```

Пусть $g(n)$ обозначает число слов "алгоритм", которые напечатает программа.

(i) Найдите в виде функции от n Θ-асимптотику $g(n)$.
(ii) Считая n степенью двойки, вычислите $g(n)$ точно.

Задача 7. (0.02).

Оцените трудоемкость рекурсивного алгоритма, разбивающего исходную задачу размера n на три задачи размеров $\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil - 5$, используя для этого $10\frac{n^3}{\log n}$ операций.

Задача 8. (0.02). Рассмотрим детерминированный алгоритм поиска медианы по кальке известного линейного алгоритма, где используется разбиение массива на четвёрки элементов, в каждой из которых определяется *нижняя* медиана, т. е. из в каждой четверки выбирается второй по порядку элемент (элементы можно считать различными). Приведите рекуррентную оценку числа сравнений в этой процедуре и оцените сложность такой модификации.

Задача 9. (0.02). Оцените трудоемкость рекурсивного алгоритма, разбивающего исходную задачу размера n на n задач размеров $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ каждая, используя для этого $O(n)$ операций.

Задача 10. (0.03). Функция натурального аргумента $S(n)$ задана рекурсией:

$$S(n) = \begin{cases} 100 & n \le 100 \\ S(n-1) + S(n-3) & n > 100 \end{cases}$$

Оцените число рекурсивных вызовов процедуры $S(\cdot)$ при вычислении $S(10^{12})$.

Задача Д–2. (0.02). Оцените как можно точнее высоты дерева рекурсии для рекуррентности $T(n) = T(n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor) + T(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + \Theta(n)$.

Быстрое умножение чисел и матриц
Краткий конспект
Литература: [Кормен 1, §31.2]
Литература: [Кормен 3, §4.2], [ДПВ, §2.5]

Школьный способ "умножения в столбик" n-битовых чисел заключается в последовательном сложении n двоичных чисел длины $O(n)$, т.е. сложность способа $O(n^2)$. Можно ли умножать числа быстрее?

Рассмотрим умножение n-значных чисел A и B. Представляя A и B в виде $A = A_1 + 2^{\frac{n}{2}}A_2$, $B = B_1 + 2^{\frac{n}{2}}B_2$, где A_1, A_2, B_1, B_2 — $\frac{n}{2}$-значные числа, находим: $AB = A_1B_1 + 2^{\frac{n}{2}}((A_1 + A_2)(B_1 + B_2) - (A_1B_1 + A_2B_2)) + 2^nA_2B_2$.

Если не учитывать, что в "среднем" члене разрядность может увеличиться на 1, то получаем рекурсию для числа операций $\varphi(n)$ в алгоритме: $\varphi(n) = 3\varphi(\frac{n}{2}) + O(n)$, откуда по ОТ $\varphi(n) = O(n^{\log 23} = O(n^{1.5849\ldots})$.

Следующий трюк позволяет "избавиться" от лишнего разряда. Для этого запишем $A_1 + A_2 = a_1 2^{\frac{n}{2}} + a_2$ и $B_1 + B_2 = b_1 2^{\frac{n}{2}} + b_2$, где a_1, b_1 — биты. Тогда $(A_1 + A_2)(B_1 + B_2) = a_1b_1 2^n + (a_1b_2 + a_2b_1)2^{\frac{n}{2}} + a_2b_2$. Член a_2b_2 вычисляется рекурсивно, а остальные вычисляются в линейное время.

Пример работы алгоритма Карацубы (стрелка после произведения указывает на вспомогательные произведения, которые требуется вычислить; рекурсия останавливается на двузначных числах):
1) $216_{10} \times 139_{10} = 11011001 \times 10001011 \to 1101 \times 1000, 1001 \times 1011, (1101 + 1001) \times (1000 + 1011) = 10110 \times 10011$;
2) $1101 \times 1000 \to 11 \times 10 = 110; 01 \times 00 = 0; (11 + 01) \times (10 + 00) = 100 \times 10 = 1000$;
3) $1101 \times 1000 = 1100000 + (1000 - 110 - 0) \times 100 + 0 = 1101000$
4) $1001 \times 1011 \to 10 \times 10 = 100, 01 \times 11 = 11, (10+01) \times (10+11) = 11 \times 101 = 1111$;
5) $1001 \times 1011 = 1000000 + (1111 - 100 - 11) \times 100 + 11 = 1100011$
6) $010110 \times 010011 \to 010 \times 010 = 100, 110 \times 011, (010 + 110) \times (010 + 011) = 1000 \times 0101 = 101000$
7) $0110 \times 0011 \to 01 \times 00 = 0, 10 \times 11 = 110, (1 + 10) \times (0 + 11) = 11 \times 11 = 1001$;
8) $0110 \times 0011 = 0 + (1001 - 0 - 110) \times 100 + 110 = 10010$
9) $010110 \times 010011 = 100000000 + (101000 - 10010 - 100) \times 1000 + 10010 = 110100010$
10) $11011001 \times 10001011 = 110100000000000 + (110100010 - 1101000 - 1100011) * 10000 + 1100011 = 111010111010011 = 30163_{10}$

Алгоритм Штрассена

Обычный способ перемножения 2×2 матриц требует 8 умножений и 4 сложения:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

В 1969 году Ф.Штрассен (V.Strassen) открыл, что следующую процедуру

$$\begin{array}{lllllll} p_1 & = & a(f - h) & & p_2 & = & (a + b)h \\ p_3 & = & (c + d)e & & p_4 & = & d(g - e) \\ p_5 & = & (a + d)(e + h) & & p_6 & = & (b - d)(g + h) \\ p_7 & = & (a - c)(e + f). & & & & \end{array}$$

Теперь

$$\begin{array}{lllllll} ae + bg & = & p_5 + p_4 - p_2 + p_6 & & af + bh & = & p_1 + p_2 \\ cf + dh & = & p_5 + p_1 - p_3 - p_7 & & ce + dg & = & p_3 + p_4. \end{array}$$

Таким образом, нам требуется 7 умножений и 18 сложений. На первый взгляд, мы поменяли шило на мыло, но (тут начинается маленькое чудо), обратим внимание на то, что формулы Штрассена справедливы и тогда, когда переменные некоммутативные, а **поэтому возможно рекурсивное применение процедуры для перемножения матриц**! Теперь вспомним, что сложение двух $n \times n$ матриц требует только $O(n^2)$ операций. Поэтому, если рекурсивно запустить алгоритм (подробности можно прочитать, например в **[Кормен 1, §31.2]**), т.е. разбить матрицу порядка $n \times n$ на четыре блока порядка $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ и провести перемножения блокам по формулам, записанным выше[1], то получится такая рекуррентная оценка трудоемкости алгоритма перемножения матриц: $T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + O(n^2)$.

Попробуйте запрограммировать алгоритм Штрассена (рекурсия должна обрываться на матрицах небольшого порядка) и *явно* оцените порядок матриц, для которых *полное* число операций алгоритма Штрассена становится *меньше*, чем у классического[2]

"Индийское" возведение в степень
Аддитивные цепочки
Краткий конспект.

Литература: Д.Кнут. Искусство программирования для ЭВМ, М.: Мир, 1977, т.2 §4.6.3 "Вычисление степеней".

Попробуем проиллюстрировать цели нашего курса, а также возникающие при этом трудности, на примере простой задачи.

ПРОБЛЕМА: даны натуральные числа a и n в двоичной записи. Нужно построить алгоритм для вычисления a^n.

Вообще говоря, решение этой проблемы известно каждому с первого класса (а возможно, и раньше), поскольку, если не вдаваться "в детали", то речь идет о последовательном $n - 1$-кратном умножении на a. Итак, искомый алгоритм фактически строится тривиально, причем по очевидным причинам он корректный.

Но, как известно, дьявол кроется в деталях, и такая процедура нас не устраивает по следующей причине: для ее выполнения нужно порядка n умножений. Оценим сложность алгоритма. Представим себе, что умножение занимает один такт времени[3]. Тогда алгоритм требует $n - 1$ тактов. Скажем, если двоичная длина n порядка 1000 бит, то алгоритм будет работать 2^{1000}, а это число значительно превышает число протонов во Вселенной.

Зафиксируем этот факт. Нам удалось построить алгоритм решения задачи, и даже проанализировать его корректность. Это уже большое достижение. Но нас не удовлетворяет трудоемкость процедуры, и мы естественно переходим к вопросу, нельзя ли предложить более быстрый алгоритм для этой задачи.

Способ исправления ситуации многим, я уверен, известен. Его подсказывает известный способ вычисления степеней двойки: вместо последовательного умножения будем последовательно возводить промежуточные результаты в квадрат: $x_0 \leftarrow a, x_1 \leftarrow x_0^2, \ldots, x_k \leftarrow x_{k-1}^2$. Ясно, что $x_k = a^{2^k}$. Использование этой идеи приводит к следующему алгоритму возведения в степень: нужно последовательно сканировать биты показателя n справа налево и в зависимости от четности просматриваемого бита умножать те-

[1] Контрольный вопрос. Почему можно проводить вычисления по тем же формулам, что мы использовали для чисел?

[2] Имейте в виду, что этот порядок — небольшой, а алгоритм Штрассена — практическая процедура для "плотно заполненных матриц". В настоящее время известно много других способов быстрого умножения матриц и рекордный имеет асимптотическую оценку числа операций чуть меньше, чем $O(n^{2.373\ldots})$, но практичным и точным алгоритмом является лишь метод Штрассена. Некоторые мои коллеги считают, что **существует практическая процедура перемножения матриц с асимптотической трудоемкостью $O(n^{2+\varepsilon})$**. Такой алгоритм может (гипотетически) перевернуть весь мир вычислительной линейной алгебры. Замечу, что примерно четыре года в задаче поиска наилучшего алгоритма умножения матриц произошло первое за последние 25 лет продвижение. Кстати, как это ни покажется удивительным и даже неуместным в подобном контесте, связанная с этим результатом история драматична. Об этом можно почитать, например, http://www.scottaaronson.com/blog/?p=839#comments

[3] Кстати, именно для нашей задачи такое предположение не совсем оправданно, поскольку, если считать, что мы выполняем умножение "в столбик", то сложность такой операции *пропорциональна произведению длины битовых записей сомножителей*, а длина записи сомножителей растет.

кущий результат на a или возводить в квадрат (программа ниже взята из книги А.Шеня "Программирование: теоремы и задачи"):

```
k := n; b := 1; c:=a;
{a в степени n = b * (c в степени k)}
while k <> 0 do begin
| if k mod 2 = 0 then begin
| | k:= k div 2;
| | c:= c*c;
| end else begin
| | k := k - 1;
| | b := b * c;
| end;
end;
```

Оказывается, что в старинном "индийском алгоритме" (другое название *бинарный алгоритм*) используется похожая идея, но биты показателя сканируются слева налево (просмотр идет от старших битов к младшим).

Описание алгоритма следующее. В двоичной записи показателя n (нули слева убраны) произведем следующую замену символов $1 \to SA$ и $0 \to S$. В полученном слове удалим начальную пару символов SA. В результате получим "код программы" на следущем диалекте: S нужно понимать как возведение в квадрат текущего результата, а A как умножение на a. Тогда, начиная с a и двигаясь по коду слева направо, в конце вычисления мы получим a^n.

Пусть $\nu(n)$ — число единиц в двоичной записи n, а $\lambda(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$. Тогда в индийском алгоритме будет проведено $\lambda(n) + \nu(n) - 1$ умножений (а в первом рассмотренном алгоритме будет на одно умножение больше).

Зафиксируем этот факт. Мы построили целых два алгоритма и даже можем попытаться доказать их корректность. Действовать можно по индукции, и фактически для первой процедуры индукционная гипотеза записана в качестве комментария во второй строке программы. Для индийского алгоритма рассуждения аналогичны. такая ситуация, конечно, необычная, поскольку стандартная практика не предполагает проверки корректности, и вовсе не потому, что и так "все ясно", а из практической невозможности провести анализ для сколько-нибудь нетривиальной процедуры. Поэтому часть просто не понимает необходимость проверки, а (меньшая) часть видит, что это очень сложно, и ограничивается ритуальными восклицаниями: "...очевидно.. и пр.". Можно просто вспомнить прошлый семестр и увидеть обе реакции при написании контрольных и заданий.

Трудоемкость обоих алгоритмов значительно меньше, чем в исходном "наивном алгоритме", и даже растет степенным образом от *длины двоичной записи* показателя, т. е. оба алгоритмы являются эффективными. Это, конечно, хорошо.

Но можно ли дополнительно их ускорить? Вопрос этот даже в нашей игушечной постановке вовсе не праздный. Представьте себе, что вам нужно произвести не одно, а один гугл возведений в ту же степень n (при разных основаниях a), тогда экономия даже одного умноженияя может оказаться существенной.

Отметим, что индийский алгоритм неоптимальный. Например, можно вычислита^{54} можно выислить, используя семь умножений, а "индийский алгоритм" требует $\lambda(54) + \nu(54) - 1 = 5 + 4 - 1 = 8$ умножений.

Вопросы о наилучших алгоритмах вычисления степеней рассматриваются при изучении т.н. аддитивных цепочек[4].

Что же такое *аддитивная цепочка*? Это любая, начинающаяся с 1, последовательность натуральных чисел $a_0 = 1, a_1, \ldots, a_m$, в которой каждое число является суммой каких-то двух предыдущих чисел (или удвоением какого-то предыдущего числа). Обозначим $l(n)$ наименьшую длину аддитивной цепочки, заканчивающейся числом n. Длиной цепочки $a_0 = 1, a_1, \ldots, a_m$ называем число m. Например, $1, 2, 3, 5, 7, 14$ минимальная цепочка для 14, т.е. $l(14) = 5$.

Поскольку показатели при умножении складываются, то, по определению, наименьшее число умножений, необходимое для возведения в n-ю степень, равно $l(n)$.

Индийский алгоритм дает оценку $l(n) \le \lambda(n) + \nu(n) - 1$.

Можно показать, что справедлива нижняя оценка $l(n) \ge \lambda(n)$. (Отсюда вытекает, что $l(2^n) = n$, а оптимальным для вычисления a^{2^k} является, например, последовательное возведение в квадрат.)

Более тонкие оценки можно поискать в сети или посмотреть в книге Кнута. Зачастую они доказываются непросто, а по своей точности ненамного превосходят рассмотренные выше почти очевидные оценки. Общая задача определения $l(n)$ до сих пор не решена. Не известно даже, существует ли алгоритм полиномиальной сложности[5] для вычисления функции $l(n)$. Не решены также многие другие задачи об аддитивных цепочках. Например, неизвестно, верно ли равенство $l(2^n - 1) = n + l(n) - 1$ (или в другом варианте $l(2^n - 1) \le n + l(n) - 1$). Это достаточно широко известная гипотеза Брауэра- Шольца. Другая знаменитая нижняя граница $l(n) \ge \lambda(n) + \log_2(\nu(n))$ "почти доказана": справедливо неравенство $l(n) \ge \log_2(n) + \log_2(\nu(n)) - 2.13$ (но с 1974 года этот результат не улучшен). Некоторые естественные гипотезы об аддитивных цепочках оказались неверными. Обо всем этом можно почитать в замечательной книге Кнута.

Наилучшая из общих верхних оценок была доказана в тридцатые годы Альфредом Брауэром и имеет вид

$$\lambda(n)\left(1 + \frac{1}{\lambda(\lambda(n))} + \frac{O(\lambda(\lambda(\lambda(n))))}{(\lambda(\lambda(n)))^2}\right).$$

Она вытекает из следующей теоремы, если в ней положить $k = \lambda(\lambda(n)) - 2\lambda(\lambda(\lambda(n)))$.

Теорема 1 (А. Брауэр, 1939) *При $k > 1$ справедливо неравенство*

$$l(n) < (1 + 1/k)\log_2 n + 2^k.$$

Наметим доказательство этого неравенства. Представим показатель n как число в $m = 2^k$-ичной системе счисления (это т.н. 2^k-арный метод): $n = d_0 m^t + d_1 m^{t-1} + \ldots + d_t$. Тогда можно записать следующую аддитивную цепочку (возможно, некоторые члены в ней повторяются, но это не важно, поскольку мы хотим оценить ее длину сверху). Сначала вычислим цепочку $1, 2, 3, \ldots, m-2, m-1$ [в исходных терминах возведения в степень это соотвествует вычислению $a, a^2, \ldots, a^{m-1}$]. (Заметим, что на самом деле важны только показатели d_j, входящие в представление n.) Затем вычислим цепочку $2d_0, 4d_0, \ldots, md_0, md_0 + d_1$ [это соотвествует возведению a^{d_0} в m-ю степень и умножению на a^{d_1}. Далее рассмотрим цепочку $2(md_0 + d_1), 4(md_0 + d_1), \ldots, m(md_0 + d_1), m^2 d_0 + md_1 + d_2$ и т.д., пока не получим n. Для наглядности выпишем всю цепочку.

$$\begin{aligned}
&1, 2, 3, \ldots, m-2, m-1\\
&\qquad 2d_0, 4d_0, \ldots, md_0, md_0 + d_1,\\
&2(md_0 + d_1), 4(md_0 + d_1), \ldots, m(md_0 + d_1), m^2 d_0 + md_1 + d_2,\\
&\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots,\\
&\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots, m^t d_0 + m^{t-1} d_1 + \ldots + d_t = n.
\end{aligned}$$

На практике, конечно, нужно вычеркнуть из нее повторяющиеся числа, а в первой строке оставить только показатели d_j (можно провести и дополнительную оптимизацию). Далее, можно показать, что длина построенной цепочки не превышает $m - 2 + (k+1)t$, откуда следует заключение теоремы, поскольку, по определению, $\log_2 n \ge kt$ и $2^k = m$.

Задание на третью неделю: 22.02–28.02 [0.12]
Полиномиальные алгоритмы
Полиномиальность метода Гаусса.
Раздел 4 программы
Литература: [Кормен 1, Глава 36]
[Кормен 3, Глав 34], [ДПВ. Глава 8]

Немного теории

[4]Идущий ниже текст основан на компиляции текста Кнута и популярного текста.

[5]Это означает, как мы уже понимаем, что время работы алгоритма ограничено некоторым полиномом от $\log n$.

Мы приступаем к исследованию формальных свойств алгоритмов, трудоемкость которых полиномиальна по длине входа. Напомню, что такие алгоритмы мы считаем эффективными[6].

Ниже идет краткое теоретическое введение по разделу 3 программы, хотя формально в это задание включены только задачи о классе $\mathcal{P}$.

Пусть фиксирован алфавит Σ (если специально не оговорено, то будем считать, что $\Sigma = \{0, 1, *(\text{разделитель})\}$). Вспомним, что *предикат*— это булева функция на словах $P(\cdot) : \Sigma^* \to \{0, 1\}$, и любому предикату можно поставить в соответствие язык всех слов, на которых он истинен: $\{x \in \Sigma^* | P(x) = 1)\}$. Класс $\mathcal{P}$ состоит из всех *полиномиально вычислимых предикатов* или *языков*, которые распознаются *полиномиальными алгоритмами*. Иными словами, любой предикат $P(\cdot) \in \mathcal{P}$ вычисляется на произвольном входе x за время $poly(|x|)$, где $|x|$— длина слова x или длина кодировки входа x. А любому полиномиальному алгоритму T — вычислимой функции, перерабатывающей *слова-входы* x_i в слова-выходы *ответы* y_i, $i = 1, 2, \dots$ можно сопоставить ее *график* полиномиальный предикат: $L_T = \{x_1 * y_1, x_2 * y_2, \dots\} \in \mathcal{P}$.

На любой универсальный язык программирования (иначе говоря, на любую универсальную МТ) можно наложить естественные *синтаксические* ограничения, выделяющие полиномиальные алгоритмы. Например, если использовать "Паскаль", то нужно отказаться от использования GOTO, REPEAT и WHILE, а все циклы FOR должны иметь полиномиальную по длине входа границу. Наоборот, любой полиномиальный алгоритм может быть оформлен с приведенными синтаксическими ограничениями.

Следующее замечание-вопрос носит полуфилософский характер: а почему используются именно полиномы? Ответ (опять же полуфилософский): прежде всего, поскольку они замкнуты относительно суперпозиции, поэтому, если программа, выполняющаяся за полиномиальное по входу время, будет фиксированное число раз вызывать любые подпрограммы, также выполняющиеся за полиномиальное время, то и результирующая программа также будет выполняться за полиномиальное время. **Контрольный вопрос: сохранится ли ответ, если допустить, скажем, линейное по входу число обращений к (полиномиальным) подпрограммам?**

Следующий шаг, который мы сделаем, в каком-то смысле прямо противоположен деятельности по разработке и анализу эффективных алгоритмов [для конкретных задач]. Мы начнем изучать методы, позволяющие заключить, что подобных алгоритмов [для этих конкретных задач] не существует. Мы начали обсуждать эту проблему на занятиях, когда, например, коснулись (информационной) нижней оценки $\Omega(n \log n)$ сортировки попарными сравнениями. **Эта тема является одной из центральных тем курса. Она связана с описанием классов $\mathcal{P}$,$\mathcal{NP}$ и $co-\mathcal{NP}$ и понятием полиномиальной сводимости.** Трудности с изучением этой темы аналогичны тем, которые возникли, например, в прошлом году при изучениии регулярных языков: отсутствие в предыдущем опыте каких-то формальных или неформальных картинок, помогающих правильно сориентироваться. Это, прежде всего, означает, что стандартный метод обучения: начать изучение за три минуты до экзамена или зачета, может оказаться крайне непродуктивным. К этой теме нужно просто "привыкнуть", что подразумевает постоянное продумывание возникающих вопросов.

Класс $\mathcal{P}$ составляют предикаты (= свойства, языки), которые можно проверить с помощью полиномиального по входу алгоритма и именно свойства свойства таких языков изучаютя в этом задании. Но Класс $\mathcal{NP}$ составляют предикаты, имеющие полиномиальные по входу сертификаты (доказательства). Формально, предикат L принадлежит классу $\mathcal{NP}$, если он представим в форме $L(x) = \exists\, y\, [(|y| < poly(|x|)) \wedge R(x, y)]$, где $R(\cdot, \cdot) \in \mathcal{P}$.

[6]Хотя каждый понимает, что это некоторое теоретическое преувеличение. Как, например, использовать алгоритм, временная сложность которого оценивается полиномом степени гугл? На самом деле, неформальный смысл дискриминации полиномиальный — неполиномиальный гораздо глубже. Оказывается, дальше идет чистый лозунг — или лучше сказать — тезис, что попытки уточнения уже известных оценок и/или попытки построить полиномиальные алгоритмы приводят к существенному расширению нашего понимания мира алгоритмов вообще. А последний, как мы уже понимаем, несмотря на внешнюю простоту описания, может быть весьма хитрым и контраинтуитивным.

Например, пусть предикат $R(x, y) =$ "y есть гамильтонов[7] цикл в графе x". Более точно можно сказать так: "x есть двоичный код некоторого графа, а y — код гамильтонова цикла в этом графе (используем такое кодирование, при котором код цикла не длиннее кода графа), такие что...". Возьмём $poly(n) = n$. Тогда $L(x)$ в точности означает, что в графе x есть гамильтонов цикл.

Слово y понимается как "подсказка", "сертификат (= доказательство)" наличия свойства.

Рассмотрим игровую интерпретацию приведенного определения $\mathcal{NP}$.

Имеются два персонажа: король **А**ртур, умственные способности которого полиномиально ограничены, и волшебник **М**ерлин, который интеллектуально всемогущ и знает правильные ответы на все вопросы. Король **А** интересуется некоторым свойством $L(x)$ (например, "есть ли у графа x гамильтонов цикл"). Волшебник же **М** *пристрастен* и хочет, чтобы король признал наличие этого свойства (ну, скажем, граф стремится к званию гамильтонова и дал **М** взятку). **А** не доверяет своему волшебнику, зная его корыстолюбие (на родном языке короля это, видимо, звучало бы так:"He is too clever to be honest"[8]), и хочет иметь возможность самостоятельно проверить предложенный **М** ответ.

Поэтому они действуют следующим образом. **А** и **М** оба изучают "личное дело" графа (его кодировку) x, после чего **М** сообщает некоторую информацию (слово y), которая должна убедить **А**, что $L(x) = 1$. Используя эту информацию, **А** проверяет убедительность аргументов **М** некоторым полиномиальным алгоритмом $R(x, y)$.

В этих терминах определение класса $\mathcal{NP}$ можно сформулировать так: свойство L принадлежит классу $\mathcal{NP}$, если у **А**ртура есть такой полиномиальный способ $R(\cdot, \cdot)$ проверки убедительности доводов **М**ерлина, что при $L(x) = 1$ у **М** есть сертификат y, $|y| < poly(|x|)$, убеждающий **А** (т.е. $R(x, y) = 1$). А если $L(x) = 0$, то как бы **М** ни изощрялся, **А** не поверит, что $L(x) = 1$, т.к. при любом сертификате $R(x, y) = 0$.

Эквивалентно $\mathcal{NP}$ можно определить, как класс языков, распознаваемых *недетерминированными* полиномиальными МТ. Такая машина совершает полиномиальное по длине входа число переходов, но на каждом шаге может сама выбирать синтаксически допустимый переход. Как уже отмечалось в доисторические времена, механизм индетерминизма в природе, вроде бы, не наблюдается и вводится *специально* для того, чтобы хоть что-то узнать о предположительной сложности задач (= языков).

Полиномиальная *сводимость* по Карпу (или *полиномиальная many-to-one*-сводимость или *полиномиальная mapping*-сводимость) определяется следующим образом. Предикат L_1 полиномиально сводится к предикату L_2 (обозначение $L_1 \leq_p L_2$), если существует такая функция $f(\cdot)$, вычислимая некоторым *полиномиальным алгоритмом*, что $\forall x \big(x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2\big)$.

Из этого определения легко вытекает, что если $L_1 \leq_p L_2$, то справедливы следующие импликации: (i) $L_2 \in \mathcal{P} \Rightarrow L_1 \in \mathcal{P}$; (ii) $L_1 \notin \mathcal{P} \Rightarrow L_2 \notin \mathcal{P}$; (iii) $L_2 \in \mathcal{NP} \Rightarrow L_1 \in \mathcal{NP}$.

Предикат $L \in \mathcal{NP}$ называется *$\mathcal{NP}$-полным*, если любой предикат из $\mathcal{NP}$ к нему полиномиально сводится.

Самым известным $\mathcal{NP}$-полным предикатом является (согласно теореме Кука-Левина) предикат Выполнимость: $SAT(x) = 1 \Longleftrightarrow$ x есть формула[9] с булевыми переменными и символами ($\neg$, $\vee$, $\wedge$), которая *иногда* истинна (обычно в качестве формулы рассматривается просто конъюнктивная нормальная форма, причем можно считать, что *в каждый дизъюнкт входит не более 3 переменных или их отрицаний*, т.н. 3-КНФ предикат).

$\mathcal{NP}$-полные предикаты — самые сложные в классе $\mathcal{NP}$: если некоторый $\mathcal{NP}$-полный предикат можно вычислять за время $T(n)$, то любой предикат $L \in \mathcal{NP}$ можно вычислять за время $T(n^c)$ для некоторого фиксированного числа $c(L)$.

Задача 11. (4×0.01). Докажите , что следующие языки принадлежат классу $\mathcal{P}$. Можно считать, что графы кодируются соответствующими матрицами смежности.

[7]Простой (несамопересекающийся) замкнутый обход вершин графа. Назван так по имени того самого У.Р. Гамильтона (теорема Гамильтона-Кэли, уравнения Гамильтона и т.д.).

[8]Предложил А.Шень.

[9]Кстати, здесь самое время вспомнить **формальное** определение формулы.

(*i*) Язык двудольных графов, содержащих не менее 2016 треугольников (трех попарно смежных вершин).
(*ii*) Язык несвязных графов без циклов.
(*iii*) Язык квадратных $\{0,1\}$-матриц порядка $n \geq 3000$, в которых есть квадратная подматрица порядка $n - 2017$, заполненная одними единицами.
(*iv*) Пусть $q(t) = t^{2016} \in \mathbb{Z}[t]$ и $a, m \in \mathrm{Z}$ Язык $L(a,m) \subseteq \mathrm{Z}$ определяется правилами $x_0 = a \pmod m$, $x_{i+1} = q(x_i) \pmod m$. Постройте полиномиальный алгоритм, проверяющий истинность предиката: $x \stackrel{?}{\in} L(a,m)$.

Задача 12. (0.02) На клетчатой бумаге закрасили несколько клеток (координаты закрашенных клеток передаются на вход). Лежит ли в классе $\mathcal{P}$ язык, состоящих из описаний таких множеств закрашенных клеток, которые можно замостить доминошками размера 1×2 ровно в два слоя? (Накрыты должны быть только закрашенные клетки и ровно двумя слоями домино.)

Для доказательства принадлежности языка классу $\mathcal{P}$ нужно предъявить и обосновать полиномиальный алгоритм. Для обоснования противоположного утверждения нужно привести убедительные, с вашей точки зрения, аргументы.

Задача 13. $(0.01 + 0.02)$ Рассмотрим систему линейных уравнений $Ax = b$ с целыми коэффициентами, имеющую m уравнений и n неизвестных, причем максимальный модуль целых коэффициентов A, b равен h.
(*i*) Оцените сверху числители и знаменатели чисел, которые могут возникнуть при непосредственном применении алгоритма Гаусса
Из решения этой задачи следует, что при прямом использовании алгоритма исключения Гаусса промежуточные результаты могут в принципе расти дважды экспоненциально, и потому, в частности, метод исключений не является полиномиальным по входу в битовой арифметике. Но оказывается, что метод Гаусса можно модифицировать так, что получится полиномиальный алгоритм. Модификация заключается в эмуляции *рациональной арифметики*. Для этого каждый (рациональный) коэффициент $\frac{p}{q}$ представляется парой (p', q') взаимно простых чисел $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$. Все арифметические действия над коэффициентами моделируются действиями над соответствующими парами, а в конце каждой операции, используя алгоритм Евклида, мы принудительно добиваемся взаимной простоты числителя и знаменателя. Скажем, эмуляция сложения коэффициентов, заданных парами $(7,10)$ и $(5,6)$, состоит в вычислении пары $(7\cdot6+5\cdot10 = 92,\ 6\cdot10 = 50)$, определении НОД$(92,60) = 2$ и записи ответа $(23,15)$.

Полиномиальность указанной модификации вытекает из следующего утверждения: **все элементы матриц, возникающих в методе Гаусса, являются отношением каких-то миноров исходной расширенной матрицы системы.**

Докажем это. Без ограничения общности будем считать, что ведущие элементы расположены на главной диагонали, и обозначим $(a_{ij}^{(k)})$ матрицу, полученную после k-го исключения. Также обозначим $d_1, \ldots, d_n$ элементы главной диагонали результирующей верхнетреугольной матрицы, так что $d_i = a_{ii}^{(n)}$. Пусть $D^{(k)}$— подматрица, образованная первыми k столбцами и первыми k строками *исходной матрицы системы*, а $D_{ij}^{(k)}$, $k+1 \leq i,j \leq n$— подматрица, образованная первыми k столбцами и столбцом i и первыми k строками и строкой j, матрицы, полученной после k-го исключения. Пусть $d_{ij}^{(k)} = det(D_{ij}^{(k)})$. По определению, $det(D^{(k)}) = d_{kk}^{(k-1)}$.

Ключом является следующая формула: $a_{ij}^{(k)} = \frac{d_{ij}^{(k)}}{det(D^{(k)})}$, поскольку, в соответствии с процедурой исключений $d_{ij}^{(k)} = d_1 \ldots d_k a_{ij}^{(k)}$ и $det(D^{(k)}) = d_1 \ldots d_k$. Таким образом, можно все время работать с дробями, числители и знаменатели которых *являются минорами* **исходной** *матрицы*, так что длина записи остается полиномиальной[10], а все вычисления по методу Гаусса (включая, конечно, вычисления НОД получаемых дробей) будут также полиномиальными.
(*ii*) Оцените трудоемкость модифицированного метода Гаусса в виде формулы от $m, n \log h$. Трудоемкость алгоритма Евклида считайте линейной по длине входа. Покажите, что модифицированный алгоритм будет полиномиальным по входу.

В следующей задаче мы установим, что многие стандартные алгоритмы курса ТРЯП являются полиномиальными.

Ниже используются следующие обозначения: NA — недетерминированный КА (НКА); DA — детерминированный КА (ДКА); N — магазинный автомат, принимающий по пустому стеку; F — магазинный автомат, принимающий по финальному состоянию; G — контекстно- свободная грамматика (КСГ).

$L(\cdot)$, где вместо "$\cdot$" можно подставить один из перечисленных выше объектов, обозначает класс языков, принимаемых (порождаемых) объектами указанного класса. Например, $L(G)$ означает класс всех КС-языков, причем описание каждого языка дается соответствующей КСГ.

Будем считать, что объекты задаются своими стандартными описаниями, например, НКА кодируется его диаграммой.

Если специально не оговорено, то предполагается, что все языки заданы в двоичном алфавите $\{0,1\}$.

В таблице ниже строки отвечают предикатам, а столбцы — классам языков, которые задаются указанными объектами. Рассматриваются следующие предикаты[11]:

$L(\cdot) \stackrel{?}{=} \emptyset$ — язык пуст; $L(\cdot) \stackrel{?}{=} \infty$ — язык бесконечен; $w \stackrel{?}{\in} L(\cdot)$ ($w \stackrel{?}{\notin} L(\cdot)$) слово "$w$" принадлежит (не принадлежит) языку $L(\cdot)$.

Нашей целью является оценка сложности получаемых «задач», т. е. оценка сложности вычисления указанных предикатов на соответствующих классах языков. Например, ячейке (2,2) в таблице отвечает задача проверки непустоты языка, заданного ДКА.

Задача 14. $(2 \times 0.01 + 0.02)$ Покажите, что в колонках 2–4 таблицы можно поставить знак $\mathcal{P}$.

	DA	NA	G	N	F
$L(\cdot) \stackrel{?}{=} \emptyset$					
$L(\cdot) \stackrel{?}{=} \infty$					
$w \stackrel{?}{\in} L(\cdot)$					
$w \stackrel{?}{\notin} L(\cdot)$					

Для обоснования можно сослаться на конкретный алгоритм из курса ТРЯП и (это обязательно!) привести аргументы, показывающие, что этот алгоритм полиномиальный. Для этой задачи может оказаться полезной книга **[ХМУ]**.

Задача Д–3. (2×0.02) Покажите, что в колонках 5–6 таблицы можно поставить знак $\mathcal{P}$.

[10] Контрольные вопросы: почему? Можете ли вы привести оценки?

[11] Обратите, пожалуйста, внимание на то, что предикаты в некоторых строках дополнительны, т. е. являются отрицаниями друг друга. Это отражает одну из особенностей мира алгоритмов, в котором ответы «Да» и «Нет» принципиально несимметричны. Каждый понимает, что ситуация, когда программа остановилась или когда она еще работает, существенно отличаются, и поэтому, например, есть предикаты, для которых быстрые алгоритмы известны для проверки выполнимости, а для проверки невыполнимости — нет (и наоборот). Знаете ли вы такие предикаты?

Из определения почти очевидно, что класс $\mathcal{P}$ как множество языков замкнут относительно стандартных операций над языками: объединения, пересечения, дополнения, конкатенации. Несколько труднее установить, что $\mathcal{P}$ замкнут также относительно итерации.

Задача 15. (0.02) Покажите, что класс $\mathcal{P}$ замкнут относительно $*$-операции Клини ($L^* = \varepsilon \cup L \cup L^2 \cup \dots$).

Задание на четвертую неделю: 29.02–6.03. [0.1]
Классы $\mathcal{NP}$ и $co-\mathcal{NP}$
Полиномиальная сводимость
Раздел 4 программы
Литература: [Кормен 1, Глава 36] [Кормен 3, Глава 34], [ДПВ, Глава 8]

Задача 16. (0.01+0.02) Покажите, что следующие языки принадлежат $\mathcal{NP}$ (постройте соответствующие сертификаты "y" и проверочные предикаты $R(x,y)$).
(i) Язык несовместных систем линейных уравнений с целыми коэффициентами от 2016 неизвестных.
(ii) Язык несовместных систем линейных неравенств с целыми коэффициентами от 2016 неизвестных.

Задача Д–4. (0.03) Язык из пункта (ii) при дополнительном предположении, что переменные $\{x_i\}$ целочисленные. Если эта задача представляет трудности, то разберите случай, когда неизвестных два ($k = 2$).

Задача 17. (0.01) Покажите, что класс $\mathcal{NP}$ замкнут относительно $*$-операции Клини. Укажите, как построить для результирующего языка L^*, $L \in \mathcal{NP}$ соответствующий сертификат "y" и проверочный предикат $R(x,y)$.

Приведем теперь пример языка, принадлежность которого классу $\mathcal{NP}$ совершенно не очевидна.

Сначала вспомним кое-какие элементарные сведения о поле вычетов $\pmod p$ Просто понять, что в $\mathcal{NP}$ лежит язык составных чисел $A = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, \dots\}$ (сертификатом служат предъявляемые сомножители). Но оказывается, что в $\mathcal{NP}$ лежит и язык $B = \mathrm{Z} \setminus A = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ простых чисел[12]. Полиномиальный сертификат устроен хитро. Как мы знаем, $p \in B \Leftrightarrow \exists g : \{g^i \pmod p,\ i = 1, 2, \dots, p-1\} = \{1, 2, \dots, p-1\}$ (написано равенство множеств). Поскольку длина записи числа p составляет $\log p$, то длина сертификата должна быть $\mathrm{poly}(\log p)$. И если быстро возводить числа $\pmod p$ в степень мы еще умеем[13], то все равно массив $\{g^i \pmod p\}$ слишком длинный. Но, как мы помним, вычет g с нужными свойствами существует тогда и только тогда, когда выполнено $g^{\frac{p-1}{p_1}} \neq 1 \pmod p, \dots, g^{\frac{p-1}{p_k}} \neq 1 \pmod p$, где $p_1, \dots, p_k$ — это все простые делители числа $p - 1 = p_1^{l_1} \dots p_k^{l_k}$. Число проверок действительно уменьшилось и стало полиномиальным (их заведомо не больше $\log p$), но, кажется, что мы ничего не выиграли: нам ведь нужно решить **ту же задачу построения сертификата простоты** для всех p_j, $j = 1, 2, \dots, k$. Хитрость заключается в том, что нужно применить ту же идею рекурсивно, поскольку длина сертификатов для всех p_i сильно уменьшилась! Фактически сертификатом будет дерево с нужными пометками в вершинах, и нам нужно показать, что суммарная длина всех участвующих в описании дерева компонентов останется полиномиальной по $\log p$.

[12] В 2002 году появилась сенсационная работа, показывающая, что $B \in \mathcal{P}$. Если вы будете ссылаться на ее результаты, то **обязаны** привести доказательство.

[13] Контрольные вопросы. Каким образом? Обуждалась ли такая задача ранее?

Задача 18. (0.02) Постройте NP-сертификат простоты для числа $p = 3911$, $g = 13$. Простыми в рекурсивном построении считаются только числа $2, 3, 5$ (они сами являются своими сертификатами).

Задача 19. (0.01) Покажите, что язык *разложения на множители (факторизации)* $L_{factor} = \{(N, M) \in \mathrm{Z}^2 \mid 1 < M < N$ и N имеет делитель d, $1 < d \leq M\}$ принадлежит $\mathcal{NP} \cap co-\mathcal{NP}$.

Полиномиальная сводимость.

Полиномиальная *сводимость* по Карпу (или *полиномиальная many-to-one*-сводимость или *полиномиальная mapping*-сводимость). Предикат L_1 полиномиально сводится к предикату L_2 (обозначение $L_1 \leq_p L_2$), если существует такая функция $f(\cdot)$, вычислимая некоторым *полиномиальным алгоритмом*, что $\forall x (x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2)$.

Из этого определения легко вытекает, что если $L_1 \leq_p L_2$, то справедливы следующие импликации: (i) $L_2 \in \mathcal{P} \Rightarrow L_1 \in \mathcal{P}$; (ii) $L_1 \notin \mathcal{P} \Rightarrow L_2 \notin \mathcal{P}$; (iii) $L_2 \in \mathcal{NP} \Rightarrow L_1 \in \mathcal{NP}$.

Хочется отметить, что определение сводимости нетривиальное, и с его непониманием связано большинство ошибок. Например, попробуйте сразу, исходя из определения, ответить на совершенно пустяковый вопрос: правда ли, что полиномиальная сводимость взаимно- однозначная?

Неформально сводимости упорядочивают различные языки по сложности. Действительно, утверждение о том, что язык $\mathcal{A}$ полиномиально сводится (по Карпу) к языку $\mathcal{B}$, по определению, означает, что выяснить принадлежность произвольного слова $w \overset{?}{\in} \mathcal{A}$ можно за полиномиальное по длине $|w|$ время, если в конце вычисления можно обратиться к подпрограмме- оракулу, которая может определить принадлежность языку $\mathcal{B}$ произвольных не слишком длинных слов (длины не более $\mathrm{poly}(|w|)$). Иначе говоря, процедура распознавания слова $w \overset{?}{\in} \mathcal{A}$ заключается в том, что мы сначала за полиномиальное (по длине $|w|$) время преобразуем w в некоторое слово u, такое что $|u| \leq \mathrm{poly}(|w|)$, $w \in \mathcal{A} \Leftrightarrow u \in \mathcal{B}$, что неформально означает, что распознавание языка $\mathcal{B}$ во всяком случае не легче распознавания языка $\mathcal{A}$. Следующая задача является иллюстрацией этих соображений.

Заданы n точек плоскости V с координатами $\{(x_1, y_1), \dots (x_n, y_n)\}$. Требуется найти их *выпуклую оболочку*, т. е. наименьшее по включению выпуклое множество S_V, такое что $V \subseteq S_V$. Рассмотрим следующую модель вычислений, в которой за единицу времени можно выполнять следующие операции: 1) сравнение двух чисел; 2) сложение чисел; 3) возведение числа в квадрат (т. е. вычисление x^2 по заданному x).

Задача Д–5. (0.02) В описанной модели вычислений задача сортировки n чисел за **линейное** время сводится к задаче построения выпуклой оболочки n точек плоскости.

Таким образом, задача сортировки оказывается **не сложнее** задачи построения выпуклой оболочки. Более того, если доказать, что в рассматриваемой модели нижняя оценка сортировки $\Omega(n \log n)$ сохраняется[14], то мы получим оптимальную $\Omega(n \log n)$ **нижнюю оценку** для построения выпуклой оболочки, поскольку алгоритмы, имеющие такую трудоемкость, известны.

Задача 20. (0.03) Язык ГП состоит из всех графов, имеющих гамильтонов путь (несамопересекающийся путь, проходящий через все вершины графа). Язык ГЦ состоит из всех графов, имеющих гамильтонов цикл (цикл, проходящий через все вершины, в котором все вершины, кроме первой и последней, попарно различны). Постройте **явные** полиномиальные сводимости ГП к ГЦ и наоборот. Графы задаются матрицей смежности.

[14] Мы вернемся к этому утверждению, когда будем рассматривать сложность сортировки попарными сравнениями.

В курсе ТРЯП мы построили полиномиальный алгоритм проверки неэквивалентности регулярных языков, заданных ДКА. А какова сложность вычисления этого предиката, если один или оба языка, представлены НКА?

Задача Д–6. (0.03) Покажите, что задача проверки неэквивалентности регулярных языков, заданных НКА, в унарном (однобуквенном) алфавите принадлежит классу $\mathcal{NP}$.

Граф $G(V,E)$ называется *планарным*, если его можно вложить в плоскость, т. е. существует отображение $f: G \to \mathrm{R}^2$, посылающее вершины V в различные точки плоскости, а ребра E — в кривые (которые можно считать ломаными), соединяющие соответствующие точки-вершины, при этом кривые-ребра имеют право пересекаться только по вершинам. Соответственно, граф $G(V,E)$ называется *торическим*, если его можно вложить в *тор* — поверхность бублика — $T = S^1 \times S^1$ (S^1 — это стандартное обозначение одномерной сферы — окружности). По определению, любой планарный граф является торическим, но не наоборот. Как известно, на плоскости нельзя нарисовать без пересечения ребер (вложить) ни граф K_5 (полный пятивершинник), ни граф $K_{3,3}$ (три дома, три колодца), но их можно вложить в тор, поскольку на плоскости удается изобразить все ребра этих графов, кроме одного, которое можно пустить по ручке (вдоль параллели тора). Априори не очень понятно, удастся ли такой трюк с графом K_6 (полный 6-вершинник) или, тем более, с графом K_7 (полный 7-вершинник).

Задача Д–7. (0.01) Докажите или опровергните, что граф K_7 является торическим. Тор удобно изображать прямоугольником с отождествленными противоположными сторонами.

Задача Д–8. (0.02) Покажите, что класс торических графов принадлежит $\mathcal{NP}$.

Задание на пятую неделю: 7.03–13.03. [0.1]
Классы $\mathcal{NP}$ и $co-\mathcal{NP}$
NP-полные языки. Полиномиальная сводимость
Раздел 4 программы
Литература: [Кормен 1, Глава 36] [Кормен 3, Глава 34], [ДПВ, Глава 8]

Самый известный NP-полный язык — это, конечно, ВЫПОЛНИМОСТЬ, который состоит из кодировок всех выполнимых булевых формул. Иначе говоря, для каждой формулы [15] из языка ВЫПОЛНИМОСТЬ существуют такие значения переменных, при которых эта формула истинна. Можно считать формулы не произвольными, а, например, КНФ или даже 3-КНФ, у которых в каждый дизъюнкт входит не более 3 переменных. В последнем случае получаем язык 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ. Можно дополнительно предполагать, как это делается в **[Кормен 1]** или **[Кормен 2]**, что *в каждый дизъюнкт входит ровно три литерала* и что *все литералы в каждом дизъюнкте 3-КНФ различны*. Но от этого требования можно и отказаться, если окажется проще строить какие-то сводимости, т. е. рассмотреть более широкий полный язык, в котором литералы в дизъюнктах могут повторяться и в каждый дизъюнкт входит не более трех литералов. **Такой трактовки языка** 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ **мы и будем придерживаться в этом задании**. Тогда при часто используемом преобразовании 3-КНФ в РОВНО-3-КНФ можно просто дополнить дизъюнкт нужным числом литералов. Например, дизъюнкт $\neg x_2 \vee x_3$ переписывается в эквивалентном виде $\neg x_2 \vee x_3 \vee x_3$ или $\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_2$. Другое дело, что некоторые сводимости при таком понимании 3-КНФ, возможно, перестанут выполняться, и тогда нужно уточнить и/или изменить сами сводимости.

Приведем несколько примеров NP-полных языков.

ПРОТЫКАЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО Дано семейство конечных множеств $\{A_1, \ldots, A_m\}$ и натуральное число k. Существует множество мощности k, пересекающее *каждое* A_i. Язык остается NP-полным, *даже если предположить, что мощности всех* A_i *равны* 2.

КЛИКА. Даны неориентированый граф G и натуральное число k. В G есть клика (полный подграф) на k вершинах.

ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ

ХРОМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО. Даны неориентированый граф G и натуральное число k. Вершины G можно раскрасить в k цветов так, чтобы смежные вершины были окрашены в разные цвета. При $k = 3$ получаем язык 3-COLOR и он также NP-полный.

ГАМИЛЬТОНОВ ГРАФ. Дан неориентированый граф G, в котором есть *гамильтонов цикл*. Иными словами, существует циклический обход всех вершин графа, не попадающий ни в какую вершину дважды.

РАЗБИЕНИЕ или ЗАДАЧА О КАМНЯХ Дано конечное множество (куча) камней A, причем вес каждого камня $a \in A$ является целым положительным числом $s(a)$. Можно разбить A на две кучи одинакового веса. Иными словами, существует такое подмножество $A' \in A$, что $\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A \setminus A'} s(a)$.

3-СОЧЕТАНИЕ. Дано множество $M \subseteq W \times X \times Y$, где W, X и Y — непересекающиеся множества, содержащие одинаковое число элементов q. В M есть *трехмерное сочетание*, т. е. такое подмножество $M' \subseteq M$ мощности q, никакие два элемента которого не имеют ни одной одинаковой координаты.

РЮКЗАК. Дана натуральные числа $\{a_1, \ldots, a_n\}$ и натуральное число b, такие что сумма некоторых a_i равна b.

max −2-ВЫПОЛНИМОСТЬ. Дана 2-КНФ (т. е. КНФ, в каждую дизъюнкцию которой входит не более двух логических переменных) и двоичное число k. Существует такой набор значений логических переменных, что выполняются k или более дизъюнкций.

МАКСИМАЛЬНЫЙ РАЗРЕЗ. Дан граф G и натуральное число k. Множество вершин графа можно разбить на два непересекающихся подмножества, между которыми можно провести не менее k ребер.

Иногда говорят о взвешенном варианте задачи. Дан граф $G(V,E)$ с неотрицательной весовой функцией на ребрах $w: E \to \mathrm{Z}_+$ и натуральное число k. Можно найти дизъюнктное разбиение множества $V = V_1 \sqcup V_2$, такое что сумма весов ребер, соединяющих V_1 и V_2, не менее k.

N[от]A[ll]E[qual]-SAT. Дана КНФ-формула, для которой существует набор, такой что в каждом дизъюнкте есть истинный и ложный литералы.

Зафиксируем выполнимую КНФ $\psi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$ [зависящую от трех переменных и имеющую 1 дизъюнкт] и НЕвыполнимую КНФ $\chi(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge \neg x_1$ [зависящую от двух переменных и имеющую 3 дизъюнкта].

Везде ниже мы будем иллюстрировать сводимости, используя именно эти КНФ.

Задача 21. (0.01) В **[Кормен 1]** или **[Кормен 2]** предполагается, что в языке 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ (по Кормену) в каждый дизъюнкт входит ровно три литерала и все литералы в каждом дизъюнкте различны. Укажите, как за полиномиальное время преобразовать произвольную 3-КНФ ϕ, в которой в каждом дизъюнкте содержится не более трех литералов, причем литералы могут повторяться, в РОВНО-3-КНФ $\tilde{\phi}$, в которой в каждый дизъюнкт входит РОВНО три неповторяющихся литерала. При этом ϕ должна быть выполнима тогда и только тогда, когда выполнима $\tilde{\phi}$. Иными словами, постройте полиномиальную сводимость языка 3-

[15] Проверьте себя: приведите формальное определение **булевой формулы**. Чем отличается **булева схема** от **булевой формулы**?

ВЫПОЛНИМОСТЬ к языку 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ (по Кормену).

Задача 22. (2×0.01) Постройте сводимость языка ВЫПОЛНИМОСТЬ к языку ПРОТЫКАЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО.

Конструкция такова. Пусть $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ КНФ. Построим по КНФ семейство подмножеств $\mathcal{A}_\phi$ базового множества $\{x_1,\ldots,x_n,\neg x_1,\ldots,\neg x_n\}$. Во-первых, включим в $\mathcal{A}_\phi$ n подмножеств вида $A_i=\{x_i,\neg x_i\}$, $i=1,\ldots,n$. Во-вторых, для каждого дизъюнкта C, входящего в $\phi(\cdot)$, добавим к $\mathcal{A}_\phi$ подмножество A_C, состоящее из всех входящих в C логических переменных (если в C входит логическая переменная x_i, то включаем в A_C элемент x_i, а если в C входит переменная $\neg x_i$,то включаем в A_C элемент $\neg x_i$).

Для обоснования сводимости нужно доказать, что **исходная КНФ $\phi(\cdot)$ выполнима тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}_\phi$ имеет протыкающее множество мощности n.** Обоснование легко получить, если решить две следующие задачи.

(i) Укажите для семейства $\mathcal{A}_\psi$ соответствующее **трехэлементное** протыкающее множество.
(ii) Докажите, что мощность любого протыкающего множества для семейства $\mathcal{A}_\chi$ больше двух.

Если использовать полный язык 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ, то из построенной сводимости следует, что язык остается NP-полным, даже если все A_i имеют не более 3 элементов. Но оказывается, что язык остается NP-полным, даже если все A_i двухэлементные. Если отождествить эти пары элементов с ребрами некоторого графа, то соответствующий язык известен как ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ: даны неориентированый граф $G=(V,E)$ и натуральное число k. о В G есть *вершинное покрытие* мощности k, т. е. такое подмножество вершин $V'\subseteq V$ мощности k, что хотя бы *один конец каждого ребра* входит в V'. Покажем, что этот язык также NP-полон. Для этого сведем к нему язык 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ[16]. Во-первых, будем считать, что исходная КНФ дополнена до РОВНО-3-КНФ и в каждый ее дизъюнкт входит ровно три литерала. Построим по КНФ $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ граф G_ϕ, вершины которого помечены и делятся на *литеральные* и *дизъюнктные*. Для каждой логической переменной x_i образуем пару **смежных** литеральных вершин, помеченных, соответственно, x_i и $\neg x_i$. Для каждого 3-дизъюнкта C образуем три **смежных** дизъюнктных вершины, помеченных переменными этого дизъюнкта. Каждую дизъюнктную вершину соединим с соответствующей литеральной вершиной, имеющей ту же метку. Если ϕ имела m дизъюктов, то, по построению, G_ϕ имеет $2n+3m$ вершин.

Для обоснования сводимости нужно доказать, что **ϕ выполнима, если и только если G имеет вершинное покрытие мощности $n+2m$.** Обоснование может быть построено, если решить следующую задачу.

Задача 23. (2×0.01) (i) Укажите для графа G_ψ соответствующее $(n_{new}(\psi)+2m_{new}(\psi))$-вершинное покрытие.
(ii) Докажите, что мощность любого вершинного покрытия для графа G_χ больше $(n_{new}(\chi)+2m_{new}(\chi))$.

Здесь $n_{new}(\cdot)$, $m_{new}(\cdot)$ обозначают, соответственно, число переменных и число дизъюнктов КНФ после ее преобразования в РОВНО-3-КНФ.

В **[Кормен 1, §36.5.1]** или **[Кормен 2, §34.5.1]** описано построение по любой РОВНО-3-КНФ $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ с m дизъюнктами графа $\tilde{G}_\phi$ на $3m$ вершинах, в котором имеется клика размера m тогда и только тогда, когда $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ выполнима. Следующая задача посвящена этой сводимости. Конструкция такова. Каждому дизъюнкту отвечает тройка вершин-переменных, а ребро соединяет вершины u и v тогда и только тогда, когда они приписаны разным дизъюнктам, а отвечающие им переменные не являются отрицанием друг друга. Следующая задача посвящена этой сводимости. Сначала ψ и χ нужно преобразовать в РОВНО-3-КНФ, которые содержат m и n 3-дизъюнктов, соответственно.

Задача 24. (2×0.01) (i) Укажите для графа $\tilde{G}_\psi$ соответствующую m-клику.
(ii) Докажите, что мощность любой клики в графе $\tilde{G}_\chi$ меньше n.

О NP-полноте языков ГАМИЛЬТОНОВ ГРАФ и РАЗБИЕНИЕ см.: **[Кормен 1, §36.5.4]** и **[Кормен 1, задача 36.5-4]** (соответственно, **[Кормен 2, §34.5.3]** и **[Кормен 1, задача 34.5-5]**).

Опишем полиномиальную сводимость NP-полного языка 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ к языку $\max-2$-ВЫПОЛНИМОСТЬ (этим будет доказана полнота языка $\max-2$-ВЫПОЛНИМОСТЬ в $\mathcal{NP}$, поскольку его принадлежность $\mathcal{NP}$ очевидна).

Сначала преобразуем 3-КНФ в эквивалентную 3-КНФ, в которой каждая дизъюнкция содержит в точности 3 переменные. Для любой 3-КНФ $\alpha=\bigwedge_1^n(a_i\vee b_i\vee c_i)$, где a_i,b_i,c_i — это либо некоторая логическая переменная, либо ее отрицание, построим 2-КНФ y следующим образом: для i-й дизъюнкции $(a_i\vee b_i\vee c_i)$ включим в y 10 следующих дизъюнкций: $L_i=\{a_i,b_i,c_i,d_i,a_i\vee\neg b_i,\neg a_i\vee\neg c_i,\neg b_i\vee\neg c_i,\neg a_i\vee\neg d_i,b_i\vee\neg d_i,c_i\vee\neg d_i\}$, где d_i, $i=1,\ldots,n$ — это новые логические переменные. Таким образом, осталось проверить, что если i-я дизъюнкция выполнима [в 3-КНФ], то можно так подобрать значение переменной d_i, что не менее q дизъюнкций из L_i будут выполнимы. А если i-я дизъюнкция невыполнима [в 3-КНФ], то при любом значении переменной d_i, меньше q дизъюнкций из L_i будут выполнимы. (q — это параметр, который вы должны найти самостоятельно.) Таким образом, если исходная 3-КНФ α выполнима, то в 2-КНФ $\bigwedge_1^n L_i$ будет выполнено не менее qn 2-дизъюнктов. И наоборот, для любой невыполнимой 3-КНФ α в 2-КНФ $\bigwedge_1^n L_i$ менее qn дизъюнктов будет выполнено.

Задача 25. (2×0.02) (i) Преобразуйте ψ в РОВНО-3-КНФ [в которой образовалось k 3-дизъюнктов] и вычислите результирующую 2-КНФ $\tilde{\psi}$ при указанной полиномиальной сводимости, указав пороговое значение kq.

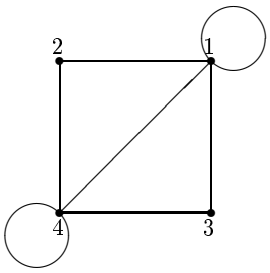
(ii) Укажите какой-нибудь набор значений логических переменных, при которых в $\tilde{\psi}$ выполнено $\geq kq$ дизъюнктов.

Задача 26. (0.02) Покажите, что если язык 3-COLOR$\in\mathcal{P}$, то за полиномиальное время можно не только определить, что граф допускает раскраску вершин в три цвета, но и найти какую-то 3-раскраску (если она существует). *Обратите внимание, что на вход процедуры, проверяющей 3-раскрашиваемость, нельзя подавать частично окрашенные графы.*

Задание на шестую неделю: 14.03–20.03. [0.1]
Теоретико-числовые алгоритмы
Раздел 6 программы
Литература: [Кормен 1, Глава 33]
[Кормен 2, Глава 31], [ДПВ, Глава 2]
[Виноградов]

Задача 27. (4×0.02) Ср. **[Кормен 1, задача 33.3]**. Диаграмма графа G изображена на рисунке.

[16] В книге **[Кормен 1, §36.5.2]** строится другая сводимость, использующая NP-полный язык КЛИКА.



Путь в графе — это произвольная последовательность смежных вершин (возможны возвраты): $c = \{v_1, \ldots, v_l\}$. По определению, длина пути c равна $l-1$.

Пусть g_n — это число путей в G длины n, которые начинаются в вершине 1. Из определения следует, что $g(0) = 1$ (единственный путь: $0 \to 0$), а $g(1) = 4$ (пути: $1 \to 1$, $1 \to 2$, $1 \to 4$, $1 \to 3$).

Пусть A — это матрица инциденций графа G:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(*i*) Вычислите число $g(2)$ путей в G длины 2 и проверьте, что оно равно сумме элементов первой строки матрицы A^2. Объясните это совпадение и докажите общую формулу для $g(n)$.

(*ii*) Найдите рекуррентное соотношение, которому удовлетворяет последовательность $\{g_n,\ n = 0, 1, \ldots\}$.

Подсказка. В ответе должна получиться рекуррентность с целыми коэффициентами типа рекуррентности Фибоначчи: $g_{n+2} = Pg_{n+1} + Qg_n$. *Можно просто подобрать коэффициенты и* **доказать**, *что они искомые. При этом необходимо вычислить хотя бы еще одно значение* $g(n)$.

Рассмотрим два способа вычисления $\{g_n,\ n = 0, 1, \ldots\}$.

Первый, основан на том, что последовательность $\{g_n\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению, и это подсказывает следующий *матричный* способ ее вычисления. Имеет место матричная формула[17] $\begin{pmatrix} g_n \\ g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q & P \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$

При вычислении $\{g_n\}$ этим способом можно использовать быстрое, например, "индийское возведение в степень" n за $O(\log n)$ тактов[18].

Второй способ вычислений основан на явном аналитическом решении линейной рекуррентности, которое можно получить самостоятельно или воспользоваться алгоритмом из текста на сайте. Например, для чисел Фибоначчи ($F_1 = 1, F_2 = 1, \ldots F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$)) этот способ приводит к известной формуле Бине: $F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$. У вас должна получится похожая формула, также содержащая квадратичную иррациональность $\sqrt{d} = \sqrt{P^2 + 4Q}$. Вычисление по аналитической формуле реализуется чуть хитрее, чем по матричной. Для каждого значения n нужно специфицировать операции и указать с какой точностью их нужно проводить (например, для вычисления $\sqrt{d}$ нужно указать процедуру вычисления, задать точность вычисления и оценить битовую трудоемкость процедуры).

На самом деле, переход к собственным векторам матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q & P \end{pmatrix}$ *показывает, что оба алгоритмы тесно связаны, и матричный алгоритм можно рассматривать как корректный способ округления ответа, полученного по аналитической формуле.*

Оценим трудоемкость нескольких алгоритмов вычисления g_n по простому модулю p.

(*iii*) Непосредственное вычисление по рекуррентной формуле. Оцените его трудоемкость при вычислении $A = g_{20000} \pmod{29}$.

(*iv*) Докажите, что последовательность $\{g_n\}$ периодична по любому модулю. Оцените ее период для $\pmod{29}$ и найдите трудоемкость вычисления (сложность нахождения периода + сложность вычисления A) этим способом.

Задача Д–9. (3×0.02) (*i*) Пусть известно, что 5 *является квадратичным вычетом* по $\pmod p$, например, $p = 29$, т. е. разрешимо уравнение $x^2 = 5 \pmod p$. Обоснуйте алгоритм непосредственного вычисления A по аналитической формуле, т. е. прямо извлекая квадратный корень в конечном поле $\pmod p$ и проводя дальнейшие арифметические вычисления. Вычислите A этим способом. Оцените трудоемкость вычисления $g_n \pmod p$ для этого случая.

(*ii*) Пусть теперь 5 *НЕ является квадратичным вычетом* по $\pmod p$, например, $p = 23$. Придумайте и обоснуйте использующий аналитическую формулу алгоритм вычисления чисел $\{g_n\}$ по такому модулю. Проведите вычисления $A = g_{10000} \pmod{23}$. Оцените трудоемкость вычисления $g_n \pmod p$ для этого случая.

В этой задаче вам предстоит разобраться, как использовать матричный алгоритм для вычислении реккурентности по простому модулю. Мы уже знаем, что эффективность процедуры сильно (или даже критически) зависит от вычисления периода $\{g_n\} \pmod p$. И, собственно, основной вопрос, на который хочется найти ответ, как найти период в матричном представлении $\{g_n\}$. Предлагается придумать алгоритм самостоятельно и/или проанализировать следующий способ. Заметим, что нам повезло, и матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q & P \end{pmatrix}$ можно диагонализировать, т. е. привести ее к виду $S\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}S^{-1}$, где λ_1, λ_2 — это собственные числа, а S — невырожденная матрица. Возводя в n-ю степень, получим $S\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}S^{-1}$.

(*iii*) Наша задача состоит в том, чтобы обосновать эти манипуляции при вычислениях $\pmod p$ и понять, в какую степень нужно возвести матрицу, чтобы получилась единичная матрица, т. е. получить аналог малой теоремы Ферма для матриц указанного вида[19]

Оцените сложность вычисления периода и вычисления $\{g_n\} \pmod p$ матричным способом и сравните его с алгоритмами из пунктов (*i*)–(*ii*).

Комментарий. В последней задаче в пунктах (*i*)–(*ii*) речь идет о т.н. *квадратичных вычетах* и возникает естественный вопрос, как по данному числу a проверить разрешимость уравнения $x^2 = a \pmod p$ (в задаче $a = 5$, $n = 29, 23$). Можно, конечно, перебрать все вычеты, используя $O(p)$ операций, но есть и более интеллигентный полиномиальный по **длине записи** $\log p$ алгоритм, Он основан на знаменитом *квадратичном законе взаимности*, о котором можно прочитать в книге **[Виноградов, гл. 2]** (и придумать алгоритм самостоятельно). Но есть и еще более простой способ, основанной на обобщении малой теоремы Ферма. Если определить (см. , **[Виноградов, гл. 2]**) т. н. *символ Лежандра*: $\left(\frac{a}{p}\right)$, равный $+1$, если число $a \neq 0 \pmod p$ является квадратичным вычетом

[17] Поскольку для $\{g_n\}$ коэффициенты P и Q — целые, то при вычислениях можно использовать только целую арифметику.

[18] Мы разбирали этот алгоритм в первом задании, и он с необходимыми изменениями переносится на матрицы.

[19] Обратите внимания, что прямого аналога малой теоремы Ферма для матриц быть не может, поскольку, например, существуют т.н. нильпотентные матрицы (какая-то их степень равна нулевой матрице). Удивительно, но тексты, посвященные аналогам теоремы Ферма для матриц, появились только в этом тысячелетии (см., www.mathnet.ru/mp238). В принципе, их мог написать сильный студент.

(mod p), и, равный -1, в противном случае, то имеет место равенство $a^{\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{a}{p}\right) \pmod p$. Таким образом, можно эффективно проверить, является ли a квадратичным вычетом, используя быстрое возведение в степень. Кроме того, можно построить быстрый вероятностный алгоритм поиска квадратичного вычета или невычета. Что понимается по этим поясняет следующая задача.

Задача 28. (*i*) Пусть НОД$(a, N) = 1$ и $a^{N-1} \neq 1 \pmod N$. Тогда по крайней мере для половины чисел из промежутка $1 \leq b < N$ выполнено $b^{N-1} \neq 1 \pmod N$.

Комментарий. Результаты этого простого, но важнейшего упражнения позволяют строить быстрые **вероятностные** алгоритмы, проверяющие простоту чисел.

Речь идет о процедурах, которые, получив на вход n-битовую двоичную запись числа, могут быстро[20] проверять, является ли рассматриваемое число простым или составным. При этом вероятностным алгоритмам разрешается по ходу вычислений совершать переходы в зависимости от результатов бросания монетки. Тут, конечно, нужно уточнить, как следует понимать время работы вероятностного алгоритма, поскольку каждому исходу бросания монеток отвечает свое (возможно, очень длинное) вычисление. В случае алгоритмов проверки простоты речь идет о построении полиномиальных процедур типа "Лас-Вегас" (это термин), которые не ошибаются, если число составное, а если число простое, то алгоритм может выдать неправильный ответ, но вероятность этого события меньше, чем фиксированная константа, скажем $\frac{3}{4}$. Поэтому, если **независимо**[21] повторить такой Лас-Вегас алгоритм k раз и во всех случаях он выдаст ответ "простое", то с вероятностью $1-(\frac{3}{4})^k$ число действительно будет простым. При таком подходе вероятность $1-0.75^{1000}$ нужно рассматривать как практическую достоверность, и именно такими методами были на сегодняшний день построены самые большие доказуемо простые числа.

Рассмотрим один подобный алгоритм "ТЕСТ ФЕРМА".

Вход: натуральное число N.

Выход: "ДА", если N — простое;
"НЕТ", в противном случае.

Случайно выбираем положительное целое $1 < a < N$.

Если НОД$(a, N) > 1$ *То*

Выход: НЕТ

Иначе { *Если* $a^{N-1} = 1 \pmod N$ *То Выход: ДА Иначе Выход: НЕТ* }

Описанный алгоритм — это "почти" полиномиальный вероятностный алгоритм проверки простоты

(*ii*) Покажите, что "ТЕСТ ФЕРМА" может быть реализован за полиномиальное по входу число операций.

(*iii*) Пусть известно, что составное число N не является числом Кармайкла[22], т. е. для некоторого натурального a, взаимно-простого с N, выполнено $a^{N-1} \neq 1 \pmod N$, тогда "ТЕСТ ФЕРМА" выдает правильный ответ с вероятностью[23] $\geq \frac{1}{2}$.

Комментарий (продолжение). Последняя задача должна навести на мысль, что вероятность нужно рассматривать как важный **вычислительный ресурс**, иногда позволяющий существенно снизить трудоемкость. Но при этом соответственно должны усилиться требования к "источникам случайности". Уже не достаточно сослаться на какой-то текст в котором 10000 часов прогонялась функция RANDOM и построены какие-то сравнительные графики или даже диаграммы. Подумаем, почему такой стандартный в программистской практике ответ нас не удовлетворяет.

Пусть N составное. Рассмотрим множество $\mathcal{A} \subseteq \{2, 3, \ldots, N-1\}$, состоящее из всех чисел, для которых нарушается тест Ферма. Согласно предыдущей задаче $|\mathcal{A}| \geq (N-1)/2$, но мы абсолютно ничего не знаем о структуре $\mathcal{A}$. Корректный случайный генератор должен уметь обслуживать (т.е. достаточно часто попадать) **во все** такие множества $\mathcal{A}$. Поэтому термин "случайный" при формальном описании алгоритма и конкретная реализация этой случайности при написании программы несут совершенно разные смысловые нагрузки. Это может быть источником путаницы, а также формальных и фактических ошибок. Например, совершенно не понятно, почему аналоговый генератор случайных чисел, получаемый из обработки щелчков счетчика Гейгера, удовлетворяет нашим требованиям (не говоря уже о многочисленных программных реализациях функции RANDOM).

Важно понять, что когда мы апеллируем к идеальному случайному генератору мы обращаемся с сложному (в принципе, сложнейшему) вычислительному ресурсу, а в программистской практике мы заменяем его некоторой доморощенной поделкой. Почему этот трюк срабатывает? Во-первых, потому что люди, придумавшие эти поделки, прекрасно понимали суть проблемы, и поделки достаточны хороши[24], а во-вторых, —- возможно, что сами множества, которые мы исследуем с помощью простых случайных генераторов, и не такие уж сложные. Например, согласно одной недоказанной гипотезе любое множество $\mathcal{A}$ обязательно содержит и "маленькие" числа (и их можно просто найти тупым перебором)[25]. Вероятностный алгоритм, предложенный в последней задаче работает не всегда, но его можно модифицировать до корректного (об этом можно прочитать **[Кормен 1, §33.8], [Кормен 2, §31.8] или в книге [К-Ш-В]**). А в 2002 году удалось построить детерминированный полиномиальный алгоритм проверки простоты, использующий близкие идеи. В следующем недельном задании мы подробнее остановимся на нем[26].

Схема RSA. Краткий конспект

Итак, для проверки простоты удается построить вероятностные и даже детерминированные эффективные алгоритмы. А как обстоит дело с близкой задачей *факторизации*, т. е. нахождения делителей большого составного числа N? Стандарный алгоритм, т.н. "решето Эратосфена", который обсуждался на первой лекции, заключается в том, что мы мысленно составляем список всех чисел от 1 до N. Последовательно вычеркиваем из списка сначала единицу, затем двойку и все кратные ей. Затем все кратные первому оставшемуся невычеркнутому числу, т.е. тройке и т.д. пока не вычеркнем N. Если это произошло на последнем шаге, то N — простое, иначе мы находим делитель. Мы пришли к заключению, что решето не является полиномиальным алгоритмом (почему?).

С современной точки зрения задачи проверки простоты и факторизации гипотетически принципиально различны, и предположительно для последней вообще нельзя построить эффективного алгоритма[27]. Грубо говоря, ничего лучше, чем рассмотренное выше решето и придумать нельзя, хотя, конечно, во всяком переборном алгоритме крайне важны константы; прочитать об этих процедурах можно, например, **[Кормен 1, §33.9]**. Задача факторизации

[20] За полиномиальное **по длине записи** — n —- время (число операций). Помните, что само число может быть порядка 2^n.

[21] Осмысление понятия *независимости* составляет важную часть теории вероятностей.

[22] Числа Кармайкла — это составные числа, для которых тест Ферма выполняется для всех чисел a, взаимно простых с модулем N. Встречаются они редко. Везде приводится первое число Кармайкла — 561, попробуйте найти второе. Известно, что чисел Кармайкла бесконечно много, но доказан этот факт был совсем недавно. Как с ними бороться и как построить корректный полиномиальный вероятностный алгоритм проверки простоты можно прочитать в книге **[Кормен 1, §33.8]** или в книге **[К-Ш-В]**.

[23] Вероятность понимается в "наивном смысле" как отношения числа благоприятных исходов к общему числу исходов.

[24] Достаточно вспомнить, что линейный модульный генератор предложил Дж. фон Нейман.

[25] Формально говоря, речь идет о том, существует ли полилогафмическая граница на величину самого первого квадратичного невычета (mod p), смотри об этом в тексте выдающегося современного ученого https://terrytao.wordpress.com/2009/08/18/the-least-quadratic-nonresidue-and-the-square-root-barrier/

[26] Но уже сейчас уместно отметить, что любые ссылки на этот алгоритм в ответах будут считаться допустимыми, только если вы умеете обосновывать его корректность.

[27] Следует отметить, что если изменить правила пересчета вероятности на те, которые (экспериментально) выполняются в микромире, и рассмотреть т.н. квантовые алгоритмы, то задачу факторизации удается быстро решить. Рекомендуем прочитать об этом в книге **[К-Ш-В]**, хотя бы для того, чтобы правильно реагировать на многочисленные досужие рассуждения на эту тему, которые периодически появляются даже в таблоидах.

имеет многочисленные криптографические приложения, где фактически используется в качестве примитива, одно из которых мы сейчас и рассмотрим.

Начнем с модельного примера выбора секретного ключа с использованием публичных каналов обмена информацией. Могут ли Алиса и Боб[28] договориться, например, *по телефону (который может прослушиваться)* о некотором *секретном ключе*, который они будут использовать в дальнейшем?

Сначала рассмотрим следующую **СХЕМУ 1**.

(*i*) Алиса и Боб выбирают большое простое число p и некоторое $1 < g < p$. Эта информация публичная и может быть перехвачена "нехорошим человеком" Евой.

(*ii*) Затем Алиса *секретно* выбирает число n, а Боб *секретно* выбирает число m.

(*iii*) Затем Алиса открыто передает Бобу число $A = ng \pmod p$, а Боб открыто сообщает Алисе число $B = mg \pmod p$.

(*iv*) Теперь оба могут легко вычислить "секретный ключ" $s = nmg \pmod p$.

Легко убедиться, что можно быстро (за полиномиальное время) найти s, зная p, g, A, B. В криптографических терминах это значит, что **СХЕМА 1** является ненадежной[29].

Рассмотрим также **СХЕМУ 2** выбора секретного ключа или схему обмена ключами Дифи и Хеллмана.[30] Хронологически эта схема предшествовала (и являлась мотивацией для) схемы RSA (см. ниже). Она очень похожа на первый вариант.

(*i*) Алиса и Боб выбирают большое простое число p и g — некоторый первообразный (примитивный) корень[31] $\pmod p$. Эта информация публичная и может быть перехвачена "нехорошим человеком" Евой.

(*ii*) Затем Алиса *секретно* выбирает число n, а Боб *секретно* выбирает число m.

(*iii*) Затем Алиса открыто передает Бобу число $g^n \pmod p$, а Боб открыто сообщает Алисе число $g^m \pmod p$.

(*iv*) Теперь оба могут легко вычислить "секретный ключ" $s = g^{mn} = (g^n)^m = (g^m)^n \pmod p$.

В настоящее время СХЕМА 2 считается надежной, поскольку Еве для дешифровки ключа предположительно нужно уметь быстро вычислять *дискретный логарифм*, т.е. решать уравнение $g^x = a \pmod p$, чего пока никто не умеет[32].

Но если Ева может не только подслушивать, но и выступать активным агентом, то дела Алисы и Боба осложняются. Например, если Ева может перехватывать и подменять сообщения, то она может послать Бобу *от имени Алисы* некоторое $g^t \pmod p$ и получить секретный ключ $g^{tm} \pmod p$ для дешифровки сообщений Боба. Такую же операцию Ева может провести и в отношении Алисы. Таким образом, возникает проблема идентификации участников. Эта задача решается, например, в очень распространенной схеме шифрования с *открытым ключом* **RSA**[33]. Состоит она в следующем.

(*i*) Боб выбирает *модуль*– число $n = pq$, равное произведению двух больших простых чисел.

(*ii*) Потом Боб выбирает *секретный ключ*– d (он известен только ему).

(*iii*) Затем Боб вычисляет *открытый ключ* $e = d^{-1} \pmod{(p-1)(q-1)}$.

(*vi*) Информация о (e, n)— публичная (например, Боб помещает ее в сеть).

(*v*) Если Алиса хочет послать секретное сообщение x Бобу, то она проводит шифровку (e{ncrypts}) $x \to e(x) = x^e \pmod n$ и посылает $e(x)$ *по открытому каналу*.

(*vi*) Боб легко дешифрует d{ecrypts}) сообщение с помощью секретного ключа $d(e(x)) \to (e(x))^d \pmod n = x \pmod n$.

Считается, что "нехороший человек" Ева не сможет прочитать сообщение, поскольку для этого ей нужно найти делители n.

Схема RSA позволяет также создавать защищенные электронные подписи. Пусть открытый ключ Боба $(e, n$. Если он хочет электронно "подписать" свое сообщение A, то должен послать сообщение $B = A^{\text{секр. ключ Боба}} \pmod n$ (для того чтобы идентифицировать "подпись" Боба его сообщение нужно преобразовать $B^e \pmod n$).

Резюме. *RSA — это асимметричная схема (для шифрования и дешифрования применяются разные процедуры), которая характеризуется следующими параметрами: $n = pq$, где p, q — различные большие простые числа; открытый ключ (e, n), где e взаимно просто с $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$; секретный ключ (d, n), где d обратно к e по модулю $\varphi(n)$. Пусть M — остаток по модулю n. Тогда процедура шифрования сообщения M выглядит так: $P(M) = M^e \pmod n$, а процедура дешифрования сообщения C выглядит так: $S(C) = C^d \pmod n$. Криптоустойчивость схемы основана на предполагаемой сложности задачи* **факторизации** *(число n всем известно, но не понятно, как по нему вычислить $\varphi(n)$, если нам не известно разложение n на множители).*

Задача 29. $(0.01+0.02)$. (*i*) Пусть открытый ключ Боба $(25, 2021)$. Он хочет послать сообщение (число) за своей подписью. В какую степень он должен его возвести?
(*ii*) Докажите или опровергните, что кодирование в системе RSA $M \to M^e \pmod n$ биективно отображает отрезок $\{0, \ldots, n-1\}$ в себя.

Краткий конспект
Показатели. Первообразные корни

Рекомендуем почитать **[Виноградов, глава 6]**.

Абелева мультипликативная группа Z_n^* (ненулевых) кольца вычетов по модулю n иногда бывает циклической. В этом случае любая ее образующая называется первообразным (примитивным) корнем. Следующая теорема, приписываемая К.Ф.Гауссу, дает ответ на вопрос, когда первообразные корни существуют.

Теорема 2 *В Z_n существует первообразный корень, если и только если $n = 2, 4, p^k, 2p^k$, $k = 1, 2, \ldots$, p — нечетное простое число.*

Доказательство можно восстановить, если решить дополнительные задачи. В **[Кормене]** это утверждение не доказывается.

Напомним определения. Если a взаимно просто с n, то существуют положительные числа γ, для которых верно равенство $a^\gamma = 1 \pmod n$. Наименьшее из них называется **показателем a по модулю n**.

Из малой теоремы Ферма[34] $a^{\varphi(n)} = 1 \pmod n$ следует, что показатель всегда является делителем $\varphi(n)$.

Если в Z_n есть первообразный корень g, то для чисел a, взаимно-простых с n, можно ввести понятие *индекса* или *дискретного логарифма*, в котором первоообразный корень играет роль основания логарифма. По определению, если $g^\gamma = a$, то число γ называтся *индексом вычета a по* $\pmod n$ *при основании g и обозначается $\mathrm{ind}_g a$ или просто $\mathrm{ind}\, a$.*

Теорема 3 *Для всякого простого модуля p существует ровно $\varphi(p-1) = \varphi(\varphi(p))$ первообразных корней, несравнимых по* $\pmod p$.

---

[28] Это стандартные персонажи криптографических протоколов. Им обычно противостоит "нехороший человек" Ева.

[29] На самом деле, свойство криптографической ненадежности гораздо слабее, чем существование полиномиального алгоритма, поскольку Алису и Боба также не устроит результат, когда Ева может достаточно **часто** дешифровывать сообщения. Обсуждению этих вопросов посвящена обширная литература.

[30] Предложена в статье (Diffie Whitfield; Hellman Martin E. New directions in cryptography. IEEE Trans. Information Theory IT-22 (1976), N 6, 644–654), где было определено само понятие криптографии с открытым ключом.

[31] Что это такое? Почему g существует, и как его находить? Сейчас просто вспомните определение, а ниже мы поговорим об этом более подробно.

[32] Хотя к утверждению о надежности нужно относится с известной долей скепсиса. Во всяком случае на сайтах, посвященных криптографии, буквально заклинают не использовать схемы "из книжек", поскольку они довольно успешно взламываются.

Кроме того, обратите внимание, что здесь мы, как и многие авторы криптографических текстов, слегка передернули. Формально перед Евой стоит не задача вычисления дискретного логарифма, а проблема вычисления ключа по известным g^n и g^m, а эта задача может оказаться проще, чем вычисление дискретного логарифма.

[33] Названной в честь авторов R{ivest}- S{hamir}- A{dleman}. По непроверенным данным RSA прочно удерживает первое место в мире по числу проданных патентов.

[34] $\varphi(\cdot)$ — функция Эйлера.

Доказательство. Пусть δ — какой-нибудь делитель $p-1$. Тогда если существует хотя бы один вычет a с показателем δ, то существует ровно $\varphi(\delta)$ несравнимых по $\pmod p$ вычетов с этим показателем. В самом деле, по определению, все вычеты с показателем δ удовлетворяют сравнению $x^\delta = 1 \pmod p$. Но все решения этого уравнения исчерпываются списком $1, a, a^2, \ldots, a^{\delta-1}$, поскольку все эти вычеты несравнимы между собой и удовлетворяют уравнению $((a^i)^\delta = (a^\delta)^i = 1 \pmod p)$, а больше, чем δ, решений быть не может (почему?). Осталось заметить, что вычет a^s имеет показатель δ, если и только если $\text{НОД}(s, \delta) = 1$, и значит в списке есть ровно $\varphi(\delta)$ вычетов с показателем δ.

Обозначим $\psi(\delta)$ — число несравнимых по $\pmod p$ с показателем δ. Мы выяснили, что если $\psi(\delta) \neq 0$, то $\psi(\delta) = \varphi(\delta)$.

Теперь разобьем вычеты $0, 1, \ldots, p-1$ на группы, относя к одной группе все вычеты с одинаковым показателем. По построению, поскольку каждый вычет входит в какую-то группу, получим: $\sigma_{\delta|p-1}\psi(\delta) = p-1$. Но аналогичное равенство справедливо и для функции Эйлера $\forall n, \sigma_{d|n}\varphi(d) = \varphi(n)$. Следовательно, $\psi(\delta) = \varphi(\delta)$, в частности число первообразных корней по $\pmod p$ равно $\psi(p-1) = \varphi(p-1)$. □

Если в кольце Z_n есть первообразные корни, то рассуждения, аналогичные предыдущим, показывают, что показатель δ вычета a, взаимно простого с модулем n, определяется равенством $\text{НОД}(ind\, a, \varphi(n)) = \frac{\varphi(n)}{\delta}$. В частности, число первообразных корней по $\pmod n$ (если они существуют) равно $\varphi(\varphi(n))$. Таким образом, первообразных корней иногда может быть "довольно много", и если мы можем быстро проверить является ли данный вычет первообразным корнем (например, если известны множители числа $\varphi(n)$), то можно искать первообразные корни, выбирая случайные числа, как и в алгоритме проверки простоты.

Как задача нахождения первообразного корня, так и вычисление дискретного логарифма считаются вычислительно тяжелыми задачами.

Задача 30. (0.01) Пусть вычет a имеет показатель δ_1 по $\pmod{n_1}$ и показатель δ_2 по $\pmod{n_2}$, причем модули n_1 и n_2 взаимно просты. Найдите показатель a по $\pmod{n_1 n_2}$.

Задача 31. (3×0.01) (*i*) Найдите все решения уравнения $\varphi(n) = 6$.
(*ii*) Найдите распределение вычетов по показателям Z_{19};
(*iii*) Найдите все первообразные корни $\pmod{19}$.

Задача Д–10. ($0.01 + 0.02 + 0.02$) (*i*) Найдите все первообразные корни в Z_2 и Z_4.
(*ii*) Покажите, что $\mathrm{Z}^*_{2^k} \cong \mathrm{Z}_2 \times \mathrm{Z}_{2^{k-2}}$ для $k > 2$, и поэтому порядок любого элемента в группе $\mathrm{Z}^*_{2^k}$, $k > 2$ не больше $\frac{1}{2}\varphi(2^k)$ (поэтому в кольцах $\mathrm{Z}_8, \mathrm{Z}_{16}, \ldots$ первообразных корней нет).
(*iii*) Пусть нечетный модуль n имеет два или более различных простых сомножителя, т.е. $n = n_1 n_2$, причем n — нечетное и $\text{НОД}(n_1, n_2) = 1$. Покажите, используя задачу **№ 30**, что в Z_n первообразных корней нет. Аналогично проверяется, что первообразных корней нет по четному модулю $2^k n$, где нечетное число n имеет не менее двух различных простых делителей.

Замечание. Для доказательства Теоремы 2 осталось убедиться в существовании первообразных корней по модулям p^k и $2p^k$ $k > 1$, p — нечетное простое число.

Задание на седьмую неделю: 21.03–27.03. [0.2]
Раздел 7 программы

Повторение. Решение линейных диофантовых уравнений и систем линейных сравнений. КТО
Литература: [Виноградов]

Задача 32. (3×0.01) Докажите или опровергните[35] существование полиномиальных алгоритмов для
(*i*) нахождения вычета, удовлетворяющего К[итайской] Т[еореме об] О[статках], т. е. нахождения единственного вычета, удовлетворяющего системе сравнений по различным простым модулям p_i, $i = 1, \ldots, k$

$$\begin{aligned} x &= a_1 \pmod{p_1} \\ &\ldots \\ x &= a_k \pmod{p_k} \\ 0 \leq x &< p_1 p_2 \ldots p_k. \end{aligned}$$

(*ii*) проверки совместности системы сравнений

$$\begin{aligned} x &= a_1 \pmod{m_1} \\ &\ldots \\ x &= a_k \pmod{m_k} \end{aligned}$$

здесь модули m_i — произвольные натуральные числа;
(*iii*) решения системы линейных диофантовых уравнений $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i$, $a_{ij}, x_j, b_i \in \mathrm{Z}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

Хеширование
Литература: [Кормен 1, Глава 12] [Кормен 2, Глава 11], [ДПВ, §1.5]

Рекомендуем также посмотреть http://e-maxx/algo/string_hashes

Краткий конспект. Хеш- функции

Хеш- функции описывают специальную дисциплину обращения с большими массивами. Для построения хороших хеш- функций часто используют теоретико- числовые методы.

Мотивация для введения хеш-функций такова. Далее используется удачный пример из **[ДПВ]**.

Допустим, что мы хотим поддерживать динамический массив IP-адресов (скажем, клиентов или друзей в какой-то социальной сети). Напомним, что IP-адрес представляет 32-битный код, обычно разбитый на 8-битные куски $x_1.x_2.x_3.x_4$, например, 193.133.89.10. Понятно, что держать в памяти все 2^{32} возможных IP-адресов накладно, тем более, если, по вашим оценкам, число клиентов или друзей никак не сможет превысит порог, скажем, 250. Однако, если задать IP-адреса списком, то каждое обращение потребует просмотра всего списка, что может быть медленным. Поэтому предлагается дать каждому IP-адресу x "короткое имя" $h(x)$, быстро вычисляемое посредством специальной хеш-функции $h(\cdot)$, и ввести маленький массив из связанных списков, для их размешения. Например, в качестве короткого имени можно выбрать первый байт IP-адреса. При этом мы понимаем, что многие IP-адреса "склеятся", т.е. получат одно и то же короткое имя и будут помещены в связанный список под этим именем. Например, это произойдет, если клиенты (или друзья) обитают в Азии. Также понятно, что как бы мы ни выбирали хеш-функцию, для нее априори всегда существуют совокупность "плохих" IP-адресов. Что же делать?

Вспомним, что неформально хеш-функция должна выдавать на выходе равномерно распределенные "случайные" имена, так чтобы длины связанных списков не слишком отличались. Мы, конечно,

[35] В предположении $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ или трудности задачи факторизации.

не можем разрушить возможную организацию во входах, но кто нам мешает ввести рандомизацию на множестве функций, применяемых для хеширования[36]? Например, можно действовать так. Зафиксируем простой модуль $n = 257$ близкий к 250. Выберем случайно четверку чисел $a = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ по (mod 257) и определим хеш-функцию $h_a(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_1^4 a_1 x_1 \pmod{257}$. Например, рассмотренная ранее хеш-функция, выделяющая старший байт равна $h_{1,0,0,0}$.

Пусть $x_1.x_2.x_3.x_4$ и $y_1.y_2.y_3.y_4$ — *различные* IP-адреса. Предположим, что коэффициенты a_i, $i = 1, 2, 3, 4$ выбираются случайно и независимо и равновероятно принимают значение из $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Тогда[37]

$$Prob[h_a(x_1, x_2, x_3, x_4) = h_a(y_1, y_2, y_3, y_4)] = \frac{1}{n}. \qquad (1)$$

Иными словами, вероятность совпадения хеш-значений двух различных IP-адресов, вычисленных посредством случайно выбранной хеш-функции семейства, равна вероятности совпадения хеш-значений, если бы они выбирались случайно и независимо. В частности, если мы поместим m IP-адресов в хеш-таблицу, то к каждому имени в среднем будет "привешено" не более $\frac{m}{n}$ IP-адресов, чего мы и добивались.

Описанный принцип выбора хеш-функций называется **универсальным хешированием**.

Формальное определение таково. Семейство $\mathcal{H}$ хеш-функций, отображающих множество возможных ключей U в $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, называется *универсальным*, если для двух различных ключей $x, y \in U$ число функций $h \in \mathcal{H}$, для которых $h(x) = h(y)$, меньше или равно[38] $\frac{|\mathcal{H}|}{m}$. Из описанного примера следует, что семейство $\mathcal{H}_1 = \{h_a,\ a \in \{0, \ldots, 256\}^4\}$ является универсальным

Анализ (**[Кормен 1, Теорема 12.3]** или гораздо более подробная **Кормен 2,Теорема 11.3]**) показывает, что универсальные семейства хеш-функций позволяют строить хеш-таблицы, с короткой в среднем длиной связанных списков.

Введем еще одно понятие

Семейство $\mathcal{H}$ хеш-функций, отображающих множество возможных ключей U в $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, называется *k-универсальным*, если для любой последовательности k различных ключей $(x_1, \ldots, x_k)$ случайный вектор $\langle h(x_1), \ldots, h(x_k)\rangle$ (здесь h— случайная функция из $\mathcal{H}$) принимает равновероятно все m^k своих возможных значений.

Задача 33. (0.01) Докажите формулу (1).

Задача 34. (3×0.02) В этой задаче p — простое число, а все равенства понимаются по модулю p.

(i) Пусть $\vec{x}, \vec{y} \in (\mathrm{Z}/p\mathrm{Z})^n$. Пусть вектор $\vec{v} \in (\mathrm{Z}/p\mathrm{Z})^n$ выбирается случайно (каждый его элемент выбирается из $\mathrm{Z}/p\mathrm{Z}$ равновероятно и независимо от других). Найдите $\mathbb{P}(\langle \vec{v}, \vec{x}\rangle = \langle \vec{v}, \vec{y}\rangle)$.

(ii) Пусть $\vec{x}, \vec{y} \in (\mathrm{Z}/p\mathrm{Z})^n$. Пусть матрица $A \in (\mathrm{Z}/p\mathrm{Z})^{n\times m}$ выбирается случайно (каждый её элемент выбирается из $\mathrm{Z}/p\mathrm{Z}$ равновероятно и независимо от других). Найдите $\mathbb{P}(A\vec{x} = A\vec{y})$.

(iii) Постройте универсальное семейство $\mathcal{H}$ хеш-функций $h : (\mathrm{Z}/p\mathrm{Z})^n \to (\mathrm{Z}/p\mathrm{Z})^m$. Семейство должно иметь мощность $|\mathcal{H}| = p^{mn}$.

[36] Обратите, пожалуйста, внимание на этот прием: мы сознательно разрушаем возможную организацию входных данных, что позволяет нам в дальнейшем считать, что вход уже не содержит возможных "патологий", поскольку механизм разрушения зависимостей **не связан** с исходной организацией. Типичный пример: всем известный QUICKSORT.

[37] Пока можно понимать вероятность "наивно", т. е. как отношение числа благоприятных исходов к общему числу исходов. Полезно заглянуть **[Кормен 1, гл. 12]**, **[Кормен 2, гл. 11]** (лучше посмотреть оба текста, поскольку они сильно отличаются).

[38] В **[Кормен 1]** требуется равенство.

Задача Д–11. (0.02) Для хеширования множества из N элементов (элементы заранее не известны, но принимают значения из множества ключей $\gg N$) используют хеш-таблицу размера N^2 и хеш-функцию, случайно выбранную из универсального семейства. Докажите, что вероятность выбрать хеш-функцию удачно (избежать коллизий) не меньше $\frac{1}{2}$.

Стандартные структуры данных
Литература: [Кормен 1]
[Кормен 2, Главы 10, 12], [Ш]

В теорминимум ходят стандартные простые структуры данных: *массив, список (однонаправленный и двунаправленный), двоичное дерево, стек, очередь. очередь с приоритетами, куча (heap)* и **вопросы, связанные с этими структурами могут быть включены в тест**. Более сложные структуры: *сбалансированное дерево (АВЛ- и/или 2−3- и/ или красно-черное деревья)* мы рассмотрим в следующем залжании. Вы должны представлять, как реализовать такие структуры на компьютере, знать, какие операции над ними допускаются и уметь оценивать трудоемкость этих операций. В дальнейшем при обсуждении конкретных алгоритмов (например, поиска-в-глубину или поиска минимального дерева в графе) мы затронем также вопросы сложности этих алгоритмов при их реализации посредством каких-то структур данных, причем вопрос о том, какую структуру данный использовать является совсем непраздным. Конечно, в отдельных случаях, например, в задаче № 1, совершенно очевидно, что нужно использовать, но это бывает далеко не всегда.

Краткий конспект: стек, очередь, двоичная куча
автор: И. Козлов

Под структурой данных мы будем понимать некоторый абстрактный тип данных вместе с набором операций, которые составляют ее интерфейс. Операции позволяют добавлять, изменять, искать и удалять данные из структуры.

Программисты работают с абстрактными типами данных исключительно через их интерфейсы, поскольку реализация может в будущем измениться. Такой подход соответствует принципу инкапсуляции в объектно-ориентированном программировании. Сильной стороной этой методики является именно сокрытие реализации. Если пользователю доступен только интерфейс, то до тех пор, пока структура данных поддерживает этот интерфейс, все программы, работающие с этим абстрактным типом данных, будут функционировать корректно. Разработчики структур данных стараются, не меняя внешнего интерфейса и семантики функций, постепенно дорабатывать реализации, улучшая алгоритмы по скорости, надежности и используемой памяти.

Различие между абстрактными типами данных и структурами данных, которые реализуют абстрактные типы, можно пояснить на примере **стека** и **очереди**. Это простейшие структуры данных, реализующие динамические множества, которые поддерживают только операции вставки (*push* для стека и *enqueue* для очереди) и удаления (*pop* для стека и *dequeue* для очереди). Разница между ними в том, что стек представляет собой список элементов, организованный по принципу L[ast]I[n]F[irst]O[ut] "последним пришёл — первым вышел"), а очередь — F[irst]I[in]F[irst]O[ut]. Оба этих типа данных могут быть реализованы при помощи массива или линейного списка, с использованием различных методов динамического выделения памяти. Подробнее о деталях реализации можно посмотреть в **Кормен**. Однако каждая реализация определяет один и тот же набор функций, который должен работать одинаково (по результату, а не по скорости) для всех реализаций.

Задача 35. (2×0.01) (i) Покажите, как реализовать очередь с помощью двух стеков. (ii) Покажите, как реализовать стек с помощью двух очередей.

Задача 36. (2×0.01) (i) Изобразите последовательность

<13,4,8,19,5,11>, хранящуюся в дважды связанном списке, представленном с помощью нескольких массивов.
(*ii*) Выполните это же задание для представления с помощью одного массива.

Приведем список типичных операций над динамическим множеством S, элементами которого являются пары ключ-значение. Каждый конкретный интерфейс может реализовывать некоторые операции из этого списка или какие-то иные операции, как правило, связанные с нижеперечисленными.

SEARCH(S, k) Запрос возвращает указатель на элемент x заданного множества S, для которого $key[x] = k$ или NIL, если в множестве S такой элемент отсутствует.

INSERT(S, x) Пополняет заданное множество S элементом x.

DELETE(S, x) Удаляет из заданного множества S элемент x.

MINIMUM(S) Возвращает указатель на элемент множества S с наименьшим ключом. Аналогично формулируется запрос MAXIMUM(S).

SUCCESSOR(S, x) Возвращает указатель на элемент множества S, ключ которого является ближайшим соседом ключа элемента x и превышает его. Если же x — максимальный элемент множества S, то возвращается значение NIL. Аналогично формулируется запрос PREDECESSOR(S, x).

Задача 37. (0.02) Определите асимптотическое время выполнения в наихужшем случае перечисленных в таблице операций над элементами динамических множеств, если эти операции выполняются со списками перечисленных ниже типов (расшифровка обозначений в таблице: ULL (несортированный однократно связанный список); SLL (сортированный однократно связанный список); UDLL (несортированный дважды связанный список); SDLL (сортированный дважды связанный список).

	ULL	SLL	UDLL	SDLL
SEARCH(S,k)				
INSERT(S,x)				
MAXIMUM(S)				
SUCCESSOR(S,x)				

Очередь с приоритетом (англ. *priority queue*) — абстрактный тип данных в программировании, поддерживающий две обязательные операции— добавить элемент и извлечь максимум. Соответственно, интерфейсы, реализуемые очередью с приоритетом, следующие:

- insert(key, value) — добавляет пару (key, value) в хранилище;
- extract-minimum()— возвращает пару (key, value) с минимальным значением ключа, удаляя её из хранилища.

При этом меньшее значение ключа соответствует более высокому приоритету.

В некоторых случаях более естественен рост ключа вместе с приоритетом. Тогда второй метод можно назвать extract-maximum(). В качестве примера очереди с приоритетом можно рассмотреть список задач исполнителя. Когда он заканчивает одну задачу, он переходит к очередной — самой приоритетной (ключ будет величиной, обратной приоритету) — то есть выполняет операцию извлечения максимума. Начальник добавляет задачи в список, указывая их приоритет, то есть выполняет операцию добавления элемента. Очереди с приоритетом используются в некоторых эффективных алгоритмах на графах, например в алгоритме Дейкстры, а также в алгоритме пирамидальной сортировки.

Очередь с приоритетами может быть реализована на основе различных структур данных. Простейшие (и не очень эффективные) реализации могут использовать неупорядоченный или упорядоченный массив, связный список, подходящие для небольших очередей. При этом вычисления могут быть как "ленивыми" (тяжесть вычислений переносится на извлечение элемента), так и ранними (eager), когда вставка элемента сложнее его извлечения. То есть, одна из операций может быть произведена за время $O(1)$, а другая в худшем случае — за $O(N)$, где N — длина очереди. Более эффективными являются реализации на основе кучи, где обе операции можно производить в худшем случае за время $O(\log N)$. К ним относятся двоичная куча, биномиальная куча, фибоначчиева куча.

Рассмотрим далее двоичную кучу или пирамиду — такое двоичное дерево, для которого выполнены три условия:

- Значение в любой вершине не меньше, чем значения её потомков.
- Глубина листьев (расстояние до корня) отличается не более чем на 1 слой.
- Последний слой заполняется слева направо.

Такая пирамида называется невозрастающей (max-heap). Удобная структура данных для пирамиды — массив A, у которого первый элемент, $A[1]$ — элемент в корне, а потомками элемента $A[i]$ являются $A[2i]$ и $A[2i+1]$ (при нумерации элементов с первого). При нумерации элементов с нулевого, корневой элемент — $A[0]$, а потомки элемента $A[i]$ — $A[2i+1]$ и $A[2i+2]$. При таком способе хранения последние два условия выполнены автоматически.

Высота пирамиды определяется как высота двоичного дерева. То есть она равна количеству рёбер в самом длинном простом пути, соединяющем корень кучи с одним из её листьев. Высота кучи есть $\Theta(\log N)$. Если в пирамиде изменяется один из элементов, то она может перестать удовлетворять свойству упорядоченности. Для восстановления этого свойства служит процедура Heapify. Она восстанавливает свойство кучи в дереве, у которого левое и правое поддеревья удовлетворяют ему. Эта процедура принимает на вход массив элементов A и индекс i. Она восстанавливает свойство упорядоченности во всём поддереве, корнем которого является элемент $A[i]$.

Если i-й элемент больше, чем его сыновья, всё поддерево уже является пирамидой, и делать ничего не надо. В противном случае меняем местами i-й элемент с наибольшим из его сыновей, после чего выполняем Heapify для этого сына.

Процедура выполняется за время $O(\log N)$.

```
Heapify(A, i)
left ? 2i
right ? 2i+1
heap_size - количество элементов в куче
largest ? i
if left ? A.heap_size и A[left] > A[largest]
  then largest ? left
if right ? A.heap_size и A[right] > A[largest]
  then largest ? right
if largest ? i
  then Обменять A[i] ? A[largest]
       Heapify(A, largest)
```

Задача 38. (0.01 + 0.02) (*i*) Проиллюстрируйте работу процедуры $Heapify(A, 3)$ с массивом $A =< 27, 17, 3, 16, 13, 10, 1, 5, 7, 12, 4, 8, 9, 0 >$
(*ii*) Теперь построим пирамиду. Заметим, что если выполнить Heapify для всех элементов массива A, начиная с последнего и кончая первым, он станет пирамидой. В самом деле, легко доказать по индукции, что к моменту выполнения $Heapify(A, i)$ все поддеревья, чьи корни имеют индекс больше i, являются пирамидами, и, следовательно, после выполнения $Heapify(A, i)$ пирамидой будут все поддеревья, чьи корни имеют индекс, не меньший i.

Кроме того, $Heapify(A, i)$ не делает ничего, если $i > N/2$ (при нумерации с первого элемента), где N — количество элементов массива. В самом деле, у таких элементов нет потомков, следовательно, соответствующие поддеревья уже являются пирамидами, так как содержат всего один элемент.

Таким образом, достаточно вызвать Heapify для всех элементов массива A, начиная (при нумерации с первого элемента) с $[N/2]$-го и кончая первым.

```
Build-Max-Heap(A)
  A.heap_size ? A.length
  for i ? [A.length/2] downto 1
    do Heapify(A, i)
```

Докажите, что хотя здесь происходит $n/2$ вызовов функции Heapify со сложностью $O(\log N)$, но время работы равно процедуры $Build-Max-Heap(A)$ равно $O(N)$.

Задача 39. (3×0.01) (i) Покажите, что пирамида реализует очередь с приоритетами. Для этого напишите функции $Heap-Extract-Max(A)$ и $Max-Heap-Insert(A, key)$. Докажите, что обе функции работают за $O(\log N)$.
(ii) Пирамиду можно построить с помощью многократного вызова процедуры Max-Heap-Insert для вставки элементов в пирамиду. Рассмотрим следующий вариант процедуры Build-Max-Heap:

```
Build-Max-Heap-By-Inserts(A)
  A.heap_size = 1
  for i ? 2 to A.length
    do Max-Heap-Insert(A,A[i])
```

Всегда ли процедуры Build-Max-Heap и Build-Max-Heap-By-Inserts для одного и того же входного массива создают одну и ту же пирамиду? Докажите что это так или приведите контрпример.
(iii) Покажите, что в наихудшем случае для создания N-элементной пирамиды процедуре Build-Max-Heap-By-Inserts потребуется время $O(N \log N)$.

Амортизационный анализ
Литература: [Кормен 1, Главы 18, 22] [Кормен 2, Главы 17, 21], [АХУ, §§4.7–4.8]

Помимо измерений сложности конкретной процедуры вне контекста можно интересоваться её сложностью в длинной серии исполнений над постоянно меняющимися данными. В этой ситуации вполне может оказаться, что среднее время исполнения значительно меньше худшего времени исполнения. Поэтому имеет смысл рассмотреть так называемую *амортизированную* (или *учётную*) сложность алгоритма. Следующая стадартная задача поясняет и мотивирует эту постановку. Более сложные примеры мы разберем с следующем задании.

Задача 40. (0.01) Рассматривается тривиальная структура данных, которая хранит натуральное число n в двоичном представлении ($\lceil \log_2 n \rceil$ битов). При инициализации $n = 1$. Единственная поддерживаемая операция Add – увеличить хранимое число на 1. Ясно, что если число заканчивается k нулями, то эта операция потребует выполнения $(k+1)$ элементарных действий. Поэтому оценка времени работы Add по худшему случаю – $\Theta(\log n)$. Представим теперь, что программист длительное время работает с этой структурой и совершает большое число N запросов к процедуре Add. Докажите, что суммарное время работы всех выполнений процедуры оценивается как $\Theta(N)$, а не $\Theta(N \log N)$. В таких ситуациях говорят, что *амортизированное* время работы операции Add есть $\Theta(1)$.

Задание на 8-ю и 9-ю недел: 28.03–9.04. [0.12] Умножение многочленов и алгоритм БПФ Раздел 8 программы

Литература: [Кормен 1, гл.6 и §32] [Кормен 2, гл 6. и §30], [ДПВ] [Виноградов]

Нужно обязательно прочитать статью (она выложена на нашем сайте): P. Clifford, R. Clifford. Simple deterministic wildcard matching. Information Processing Letters 101 (2007) 53–54. и посмотреть сайт

`https://en.wikipedia.org/wiki/Circulant_matrix`

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА (минимальный необходимый объем понятий и навыков по этому разделу): Дискретное преобразование Фурье (ДПФ); быстрое преобразование Фурье (БПФ); схемы БПФ, перемножение многочленов с помощью БПФ. Поиск подстрок посредством БПФ. Циркулянты. Решение линейных уравнений с циркулянтными матрицами с помощью БПФ. Системы линейных уравнений с теплицевыми и ганкелевыми матрицами.

Краткий конспект

Вы уже знакомы с парой процедур, которые до какой-то степени определяют лицо нашего предмета (и не только нашего!). Это, конечно, алгоритм Евклида и метод Гаусса решения систем линейных уравнений. В этом задании мы разберем третий великий алгоритм: быстрое преобразование Фурье (БПФ). Несмотря на то, что этот метод был предложен значительно позже двух своих знаменитых собратьев[39], но в настоящее время он вряд ли уступает им по распространенности. Можно сказать, что в обыденной жизни вы встречаетесь с ним даже чаще, поскольку БПФ "вшито" чуть ли ни в каждый мобильник.

По определению, *дискретное преобразование Фурье (ДПФ)* — это отображение, переводящее последовательность коэффициентов (вообще говоря, комплексных) многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x^1 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \in \mathrm{C}[x]$ в последовательность его значений в корнях n-й степени из единицы, т.е. $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \mapsto (f(\omega_n^0), f(\omega_n^1), \ldots, f(\omega_n^{n-1}))$, где $\omega_n = \exp \frac{2\pi i}{n}$. На первый взгляд, кажется, что вычисление требует $\Omega(n^2)$ элементарных арифметических операций, ведь нужно подставить каждый корень из единицы в многочлен $f(\cdot)$ и повторить операцию n раз.

Обратите внимание, что мы пользуемся не нашей стандартной битовой моделью сложности, а используем "наивную" 'нью-мерическую' модель вычислений с плавающей запятой (float)". Иначе говоря, считаем, что у нас есть возможность достаточно точно производить ПРИБЛИЖЕННЫЕ операции с плавающей точкой так, что они существенно не повлияют на ответ. Сложностью называем полное число арифметических операций. Такая модель широко распространена на практике, но требует определенной квалификации вычислителя, причем, если степени полиномов и/или порядок используемых чисел достаточно велики, то уже обычным рецептом — повторением вычислений с двойной точностью — не отделаешься. Мы еще вернемся к этому вопросу.

Быстрое преобразование Фурье (БПФ) — это алгоритм, позволяющий вычислить ДПФ, используя $O(n \log n)$ операций.

Какое все это имеет отношение к мобильным телефонам? Приведу небольшой комментарий, хотя уверен, что вам все это известно на несколько порядков лучше, чем мне. Как известно, на заре эпохи вычислительных машин цифровые и аналоговые устройства серьезно конкурировали, но в настоящее время остались лишь островки аналоговых вычислений[40]. Иначе говоря, любой непрерывный сигнал $\phi(t)$, будь то электромагнитный импульс, посы-

[39] Алгоритм опубликовали в 1965 г. Д.Кули (James Cooley) и Д.Тьюки (John Tukey) — последний, между прочим, был консультантом по научным вопросам Джона Кеннеди,— но известно, что он применялся ранее и другими авторами. Как и следовало ожидать, его использовал "король математиков" К.-Ф. Гаусс в начале 19 века (записи были расшифрованы недавно).

[40] Хотя, с другой стороны, столь популярную в последнее время и даже проникшую в таблоиды модель квантовых вычислений, до которых мы, возможно, доберемся, можно рассматривать как явный реванш аналоговых вычислительных устройств. Если их удастся реализовать, то можно будет эффективно выполнять некоторые процедуры, весьма трудоемкие для обычных компьютеров, например факторизовать числа.

лаемый вашим мобильником, давление в аэродинамичесой трубе, распределение цветов на экране вашего монитора и т.д. должен быть отцифрован (это, как все понимают, может быть очень даже нетривиальной задачей), т.е. представлен массивом коэффициентов его значений в достаточно большом количестве точек $f(t) \mapsto (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$. Здесь t может быть временем, пространственной координатой и т.д. Предположим теперь, что моделируемое устройство, на которое поступает сигнал (модем, телефон, экран, система управления ракетой и т.д.) линейное[41] (грубо говоря, при изменении интенсивности вдвое воздействие также изменяется в два раза и выполняется принцип суперпозициии: реакция от суммы сигналов равна сумме реакций), тогда его поведение может быть описано как импульсная или весовая функция в технике, фундаментальное решение или функция Грина в математике и физике и пр. По определению, импульсная функция — это реакция системы на единичный импульс в нулевой момент $t = 0$, т.е. на δ-функцию. В нашей дискретной модели реакция тоже должна задаваться массивом $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ (считаем, что после i тактов на выходе b_i, а через n тактов реакция затухает).

Итак, пусть в момент времени $T = 0$ на вход поступает сигнал с интенсивностью a_0, который преобразуется системой в $b_0 \cdot a_0$, т.е. отклик системы в момент $T = 0$ равен $a_0 b_0$. Далее, в момент $T = 1$ на вход поступает сигнал с интенсивностью a_1, вызывающий реакцию $b_0 a_1$, которую согласно принципу суперпозиции нужно просуммировать с *остаточным* воздействием сигнала, пришедшего в момент $T = 0$, т.е. $a_0 b_1$, и отклик системы равен $a_1 b_0 + a_0 b_1$ и т.д. Таким образом, при наших предположениях о поведении системы получаем, что если $T < n$ (т.е. сигнал еще поступает), то отклик равен $c_T = \sum_{i=0}^{T} a_i b_{T-i}$, а если $T \geq n$ (т.е. входной сигнал уже затух), то $c_T = \sum_{i=T-n+1}^{n-1} a_i b_{T-i}$. В момент $T = 2n-2$ отклик равен $c_{2n-2} = a_{n-1} b_{n-1}$, а далее отклик равен нулю. Таким образом, отклик системы $c_0, c_1, \ldots, c_{2n-2}$ в точности совпадает с последовательнстью коэффициенов многочлена- произведения:

$$\sum_{i=0}^{2n-2} c_i x^i \stackrel{def}{=} \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i.$$

Итак, если мы хотим эффективно обрабатывать сигналы, то нужно научиться быстро умножать полиномы. Обычный способ умножения "столбиком" требует порядка n^2 операций, а алгоритм БПФ позволяет умножать многочлены почти на порядок быстрее. Но сначала разберемся, как, собственно, реализовать само это быстрое преобразование. Для этого мы используем симметрии корней из единицы. Заметим[42], что если n четное, то квадраты всех корней из единицы степени n образуют $\frac{n}{2}$ корней из единицы степени $\frac{n}{2}$ (можете ли вы сказать, сколько корней степени n перейдет в один корень степени $\frac{n}{2}$?). Теперь все готово для алгоритма. Попробуем применить технику "разделяй-и-властвуй". Итак, надо вычислить $f(\omega_n^k)$, $k = 0, \ldots, n-1$. Перепишем выражение по четным и нечетным индексам (считаем n четным) $f(\omega_n^k) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i} \omega_n^{2ik} + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i+1} \omega_n^{2ik+k} = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i} (\omega_n^2)^{ik} + \omega_n^k \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i+1} (\omega_n^2)^{ik}$, и задача разбивается на две аналогичные задачи для многочленов степени $\frac{n}{2} - 1$, поскольку ω_n^2 — это корень из единицы степени $\frac{n}{2}$. Получаем следующую рекуррентность для трудоемкости алгоритма $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + O(n)$, откуда $T(n) = O(n \log n)$

Остается применить изложенную технику для умножения многочленов. Для этого нужно вспомнить, что произвольный многочлен степени $n-1$ может быть однозначно восстановлен по его значениям в произвольных n точках. Поэтому вместо того, чтобы пересчитывать коэффициенты многочлена $h(x) = f(x) \cdot g(x) = (\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i)(\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i) = \sum_{i=0}^{2n-2} c_i x^i = \sum_{i=0}^{2n-2} (\sum_{j=0}^{i} a_j \cdot b_{i-j}) x^i$ (прямое вычисление коэффициентов требует $O(n^2)$ операций) мы сначала вычислим значения многочленов $f(x)$ и $g(x)$ в некоторых $2n-1$ точках интерполяции, получив массивы $F = \{f_i\}$ и $G = \{g_i\}$. Покомпонентно перемножая F и G, получаем массив $H = \{f_i \cdot g_i\}$, который, по построению, отвечает значениям многочлена-произведения $h(\cdot)$ в тех же точках интерполяции, и $h(\cdot)$ можно однозначно восстановить и получить ответ.

Итак мы получили массив значений многочлена-произведения в корнях из единицы, и теперь нам нужно восстановить его коэффициенты. Конечно, если выбирать точки интерполяции совершенно произвольно, то не понятно, почему такой метод мог бы быть эффективнее прямого вычисления коэффициентов h. Однако, выбор точек интеполяции в корнях из единицы позволяет построить $O(n \log n)$-алгоритм перемножения многочленов! Точнее говоря, трудоемкость процедуры будет $O(n \log n \cdot M)$, где параметр M отвечает за трудоемкость отдельных арифметических операций. Конечно, если считать, что точность фиксирована, то M — константа, связанная с конкретной реализацией арифметических операций с плавающей точкой, и такая запись не очень осмыслена. Значит нужно попробовать реализовать точные вычисления, считая, как обычно, коэффициенты многочленов целыми. (Такая постановка реализуется во многих системах символьных вычислений или, например, в алгоритмах быстрого перемножения больших чисел, которые, как мы помним, как раз и используют точное БПФ в качестве подпрограмы.) Мы не будем сейчас останавливаться на этом подробно (в качестве частичных рецептов посмотрите упр. 32.2-6 и задачу 32.5 из Кормена (1-е издание, — во втором издании номер параграфа 30), а также задачу **Д-2** ниже.

А сейчас ответим на исходный вопрос, почему можно быстро за $O(n \log n)$ операций восстановить коэффициенты многочлена по его ДПФ. По определению, ДПФ задается умножением матрицы типа Вандермонда $\tilde{f} = \|(\omega_n)^{ij}\|_{i,j=0,1,\ldots,n-1}$ на вектор-столбец $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$. Действительно, для корней из единицы справедливо тождество: для любого k выполнено

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\omega_n^k)^i = \delta_{0k \bmod n} \cdot n \tag{2}$$

(δ_{ij} — это символ Кронекера — дискретная δ-функция), поэтому обратную матрицу можно задать так:

$$\tilde{f}^{-1} = \frac{1}{n} \|(\omega_n^{-1})^{ij}\|_{i,j=0,1,\ldots,n-1} \tag{3}$$

и по аналогичной причине и обратное ДПФ (умножение матрицы $\tilde{f}^{-1}$ на массив коэффициентов) можно вычислить, используя $O(n \log n)$ операций.

Еще один момент, который я хотел бы затронуть в связи с БПФ, это его возможное нерекурсивное исполнение. Оказывается, что БПФ можно задать явной схемой, которая к тому же допускает параллельное выполнение (см. рис. 1).

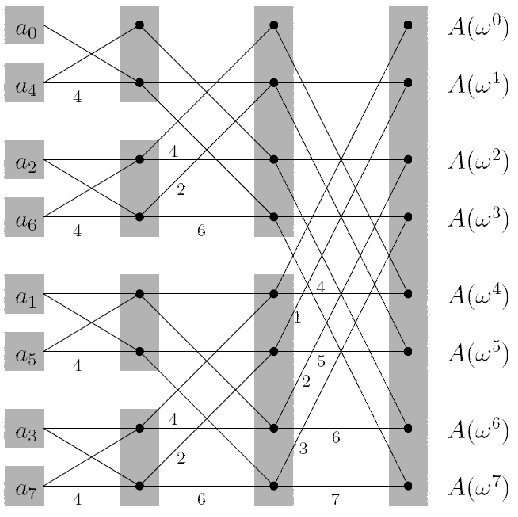


Рис. 1: Схема БПФ

На схеме ребра-провода "несут" информацию слева направо, т. е. каждому ребру приписано (комплексное) число. Метка i на ребре означает, что число, приписанное проводу, нужно умножить на ω^i. В вершинах, обозначенных черными кружками, нужно просуммировать числа, приписанные проводам, приходящим *слева*. По схеме

[41] Это почти общее предположение. Если же система нелинейная, то рассматривают ее линеаризацию.

[42] Хорошо бы действительно понять эти простые, но фундаментальные факты. Все они, конечно, доказываются в Кормене, но лучше попробовать получить их самому — это буквально одна строчка выкладок

видно, что ее основу составляет знаменитая "бабочка", отвечающая используемой в БПФ группировке степеней на четные и нечетные и переходу к половинной размерности:

$$s_i = t_i + \omega^i u_i, \qquad s_{i+n/2} = t_i - \omega^i u_i.$$

Зачем нужно писать явные схемы, когда уже построен рекурсивный алгоритм? Во-первых, рекурсия может быть неэффективной при реализации, а явная схема проще. Во-вторых, схема показывает, как запустить алгоритм параллельно. В третьих, используя структуру схемы можно решать полезные смежные задачи, например, искать некоторые ошибки, см., задачу **№ 44**.

Мы разобрались, как быстро перемножать многочлены с комплексными коэффициентами. А можно ли придумать похожий трюк для умножения многочленов с коэффициентами в кольце вычетов Z_n? Если бы это удалось, то при умножении многочленов с целыми коэффициентами можно было бы обойти упомянутый выше вопрос о точности вычислений в ДПФ, рассматривая достаточно большие модули и проводя операции в Z_n. Частичный ответ на этот вопрос будет дан в задаче **№ Д-13**.

Быстрое вычисление свертки посредством БПФ используется во многих областях, например, в такой важной области, как анализ изображений. Изображение можно считать числовой матрицей [большого] размера, а типичной задачей может быть выделение [сравнительно небольшого] блока с заданными свойствами (под блоком понимается не минор, а подматрица исходной матрицы, в которой столбцы и строки идут подряд). Интересно, что содержательна и одномерная задача — поиск подстрок, с которой успешно справляется произвольный текстовый редактор. Казалось бы, эту задачу мы успешно решили в курсе ТРЯП, построив **оптимальный** линейный КМП-алгоритм. Но оказывается, что примерно в то же время (в 1974 г.), когда были предложены и КМП, и Boyer-Moore алгоритмы, был предложен быстрый алгоритм, основанный на БПФ. Его современная версия изложена в задаче задания **№ 42**. Трудоемкость БПФ-алгоритма поиска подстрок отличается от оптимально логарифмическим фактором.

Идея БПФ-алгоритма поиска подстрок следующая. Нужно найти подстроку (образец) $p_0, \ldots, p_{m-1}$ в строке (тексте) $t_0, \ldots, t_{n-1}$, здесь p_i, t_j — это символы некоторого алфавита. Говорят, что подстрока входит с i-й позиции, если $p_j = t_{i+j}$, $j = 0, \ldots, m-1$. Если считать буквы алфавита различными целыми числами, то вхождение подстроки с i-й позиции эквивалентно обнулению суммы квадратов: $B_i = \sum_{j=0}^{m-1}(p_j - t_{i+j})^2 = \sum_{j=0}^{m-1}(p_j^2 - 2p_j t_{i+j} + t_{i+j}^2) = 0$, а вычисление массива чисел $\{B_i,\, i = 0, \ldots, n-m\}$ позволяет определить все места вхождения подстроки в текст.

"Наивный" алгоритм — прямой перебор требует $O(mn)$ операций. Но в курса ТРЯП изучался более быстрый, линейный, алгоритм. С помощью БПФ можно построить $O(n \log m)$-процедуру. Сумма $S = \sum\limits_{j=0}^{m-1} p_j^2$ присутствует как слагаемое в каждом B_i, и вычисляется за $O(n)$ шагов.

Рассмотрим два полинома степени не выше n: $T(x) = t_{n-1}x^{n-1} + \cdots + t_1 x + t_0$, $P(x) = p_0 x^{n-1} + \cdots + p_{m-1}$ Их произведение можно вычислить с помощью БПФ за $O(n \log n)$. Посмотрим на коэффициент их произведения $C(x)$ при x^{m-1+i} $(0 \le i \le n-m)$:

$$c_{m-1+i} = p_0 t_i + p_1 t_{i+1} + p_2 t_{i+2} + \cdots + p_{m-2} t_{m-2+i} + p_{m-1} t_{m-1+i} = \sum_{j=0}^{m-1} p_j t_{j+i}$$

Как видим, это одно из слагаемых для B_i. Таким образом, алгоритм для подсчета всех B_i таков. Сначала вычисляем за $O(n \log n)$ шагов коэффициенты произведения $C(x)$ указаных многочленов. Далее за максимум $O(n)$ шагов вычисляем сумму квадратов S и за $O(n)$ шагов считаем сумму первых m квадратов t_i, т. е. $H = \sum\limits_{j=0}^{m-1} t_j^2$. Далее вычисляем $B_0 = S - 2\cdot c_{m-1} + H$ и $B_1 = S - 2\cdot c_m + \sum\limits_{j=0}^{m-1} t_{j+1}^2 = B_1 + 2\cdot c_{m-1} - 2\cdot c_m - t_1^2 + t_m^2$.

Для этого нам потребуется $O(1)$ операций. Аналогично получим $B_i = B_{i-1} + 2(c_{m-2+i} - c_{m-1+i}) - t_{i-1}^2 + t_{m-1+i}^2$, т. е. для получения каждого следующего члена требуется $O(1)$ операций. Таким образом, для вычисления всех членов потребуется еще $O(n)$ операций. Таким образом, весь алгоритм асимптотически требует $O(n \log n)$ операций.

Ту же идею для проверки вхождения подстроки можно использовать, если разрешается использовать символ джокера (в курсе ТРЯП он обозначался знаком «?»). Тогда в тех же обозначениях нужно вычислить массив $\{A_i,\, i = 0, \ldots, n-m\}$, где $A_i = \sum_{j=0}^{m-1}(p_j^3 t_{i+j} - 2p_j^2 t_{i+j}^2 + p_j t_{i+j}^3)$, см. ниже задачу 2.

Наконец, еще одно важное приложение ДПФ связано с эффективным решением специальных систем линейных уравнений, в которых матрицы коэффициентов имеют специальные симметрии, а именно, постоянны вдоль каких-то "диагоналей" и тогда умножение на такую матрицу можно представить сверткой. В качестве примера таких матриц обычно рассматриваются циркулянты (строки получены циклическим сдвигом фиксированного вектора), теплицевы или ганкелевы матрицы, у которых на всех диагоналях, параллельных главной (соответственно, параллельных побочной), стоят равные элементы.

Вы должны знать, как, используя БПФ, решать системы линейных уравнений порядка $n \times n$ с циркулянтной матрицей, используя $o(n \log n)$ операций, и представлять себе, как выполнить эту задачу для случая теплицевых или ганкелевых матриц, используя $O(n^2)$ операций.

Задача 41. $(0.03 + 0.02)$. (i) Найдите произведение многочленов $A(x) = 3x + 2$ и $B(x) = x^2 + 1$, используя рекурсивный $O(n \log n)$-алгоритм БПФ.

Для этого нужно выбрать n, Найти БПФ обоих полиномов, затем вычислить ДПФ многочлена- произведения и на последнем шаге вычислить обратное ДПФ, т. е. умножить вектор-столбец, полученный в предыдущем пункте, на обратную матрицу ДПФ. Используя тождество (3), и при этом вычисление можно тоже использовать БПФ (каким образом?).

(ii) Вычислите **обратное ДПФ** массива (I — мнимая единица) $A = [10, 3I\sqrt{2} + 2 + 2I, 0, 3I\sqrt{2} + 2 - 2I, -2, -3I\sqrt{2} + 2 + 2I, 0, -3I\sqrt{2} + 2 - 2I]$, используя схему БПФ для $n = 8$ на рис. 1. Возможно, вычисление будет удобнее проводить символически для $\omega = \exp\left(\frac{\pi I}{4}\right)$.

Задача 42. $(0.01 + 0.02)$. (i) Постройте $O(n \log n)$-БПФ-алгоритм для поиска подстрок в тексте с "джокерами". (ii) Покажите, как понизить трудоемкость вашей процедуры до $O(n \log m)$.

Задача 43. (0.01). Используя ДПФ, найдите решение системы линейных уравнений $Cx = b$. где C — это циркулянтная матрица, порожденная вектором столбцом $(1, 2, 4, 8)^t$, а $b^t = (16, 8, 4, 2)$.

Задача Д–12. (0.03). Дан множество различных чисел $A \subseteq \{1, \ldots, m\}$. Рассмотрим множество $A + A$, образованное суммами элементов A. Докажите или опровергните существование процедур построения $A + A$, имеющих субквадратичную трудоемкость $o(m^2)$.

Задача 44. (0.02). (**[Кормен 1, упр. 32.3-4] или [Кормен 2, упр. 30.3-4]**. Предположим, что в схеме БПФ, изображенной на рис. 1, вышел из строя ровно один сумматор, причем он выдает число 0 независимо от входа. Сколько и каких последовательностей нужно подать на вход, чтобы идентифицировать дефектный сумматор?

ДПФ и БПФ в кольце вычетов Z_n

Сначала мы рассмотрим простой случай, когда кольцо — это простое поле GF_p и попробуем просто осуществить в нем ДПФ. Понятно, что роль корня из единицы должен играть первообразный корень, поскольку мы знаем, что определитель Вандермонда, составленный из степеней произвольного первоообразного корня, обладает всеми нужными нам свойствами, причем в арифметике Z_p, потому что речь идет опять о сумме конечной геометрической прогрессии, период которой делится на порядок данного элемента. Итак для того, чтобы перемножить многочлены можно взять достаточно большое (насколько большое?) простое число p, перемножить многочлены $\pmod p$, используя ДПФ в конечном поле, а затем восстановить коэффициенты.

Задача 45. (0.03). Выберите подходящее простое число p и перемножьте многочлены $A(x)$ и $B(x)$ над конечным полем, а затем восстановите многочлен-произведение над Z.. Обоснуйте выбор p. Скажем, можно ли взять $p = 5$? Или следует выбрать $p = 7$ или больше?

В предыдущей задаче мы обосновали ДПФ над конечным полем, но можно ли провести трюк с БПФ? Об этом следующие задачи. Напоминаем, что, на самом деле, мы пытаемся уточнить предыдущую модель, когда предполагалось, что арифметичские операции проводятся точно.

Предположим, что в Z_n есть примитивный корень ξ степени[43] 2^k. Неформально модуль n будет означать максимальную границу модулей коэффициентов, которые могут встретиться в сомножителях и в произведении, а степень произведения не должна превышать $l = 2^k - 1$. Степень двойки требуется для того, чтобы прошла рекурсия в алгоритме БПФ

Задача Д–13. $(0.01 + 0.01 + 3 \times 0.02)$.

(i) Покажите, что 3 является примитивным корнем 8-й степени в простом поле Z_{41}.

Рассмотрим многочлен $h \in Z_n[x]$ степени не выше $l = 2^k - 1$. Матрицу $\Xi = \|\xi^{ij}\|_{i,j=0,1,\ldots,l}$ назовем матрицей ДПФ. По определению, ДПФ многочлена h равно произведению матрицы Ξ на вектор-столбец коэффициентов h

(ii) Покажите, что для любого $j = 0, 1, \ldots, k-1$ элемент ξ^{2^j} — есть примитивный корень степени 2^{k-j} в Z_n.

Из последнего упражнения вытекает, что можно быстро вычислять ДПФ произвольного многочлена h степени не выше l в Z_n ровно таким же рекурсивным алгоритмом, который мы использовали в C.

(iii) Считая, что многочлены A и B (из задания) заданы над Z_{41} и $\xi = 3$ вычислите рекурсивным алгоритмом их ДПФ.

Перемножая покомпонентно вычисленные в предыдущем пункте ДПФ многочленов A и B, мы получаем ДПФ произведения C. Теперь нам осталось проверить, что можно эффективно восстановить коэффициенты C по его ДПФ. Для этого нужно проверить выполнения равенства, аналогичного (3).

(iv) Докажите, что $\Xi^{-1} = (l+1)^{-1}\|(\xi^{-1})^{ij}\|_{i,j=0,1,\ldots,l}$. Формула, конечно, справедлива для произвольной степени примитивного элемента ξ, а не только для степени 2^k, как в нашей спецификации.

(v) Используя результаты (iii) и (iv), вычислите ДПФ многочлена C и восстановите его коэффициенты рекурсивным алгоритмом БПФ [умножения обратной матрицы Ξ^{-1} на вектор столбец ДПФ].

[43] Это, по определению значит, что $\xi^i \neq 1$, $i = 0, 1, \ldots 2^k - 1$, а $\xi^{2^k} = 1$.

Конечно, выбранный нами размер поля может оказаться недостаточным для того, чтобы произвести вычисления, поэтому дополнительно приведите обоснование корректности (или некорректности) выбора размера поля (само вычисление должно быть выполнено в любом случае).

Задание на 10-ю неделю: 10.04–16.04. [0.12] Сортировка. Раздел 9 программы Литература: [Кормен 1], [Кормен 2, гл 2], [ДПВ]

Разрешающие деревья и нижние оценки сортировки.

Обсудим вопрос о минимальном числе T_{min} попарных сравнений, необходимых для нахождения минимального из n чисел. Для этой задачи алгоритм очевиден: нужно последовательно сравнивать числа, оставляя при каждом сравнении минимальное. Возникает правдоподобная гипотеза, что $T_{min} = n - 1$. Заметим, что даже в столь простой задаче ответ не очевиден, в частности, не проходит традиционный аргумент "по размеру входа", поскольку в $\frac{n}{2}$ сравнениях могут участвовать все числа, и речь фактически идет о том, какую часть информации о числах можно при сравнении передать. Рассмотрим два подхода к получению нижних оценок подобного рода.

Первый подход связан с понятием разрешающего дерева для алгоритмов сортировки **[Кормен 1 §9.1], [Кормен 2 §8.1]**. Напомним, что произвольный алгоритм A сортировки массива из n чисел $\{a_1, \ldots, a_n\}$ посредством попарных сравнений можно следующим образом изобразить в виде корневого двоичного дерева D_A. Каждая внутренняя вершина v дерева помечена некоторым сравнением $a_i ? a_j$, а в паре выходящих из v ребер одно ребро имеет пометку $\leq$, а другое $\geq$. Листья D_A помечены соответствующими перестановками $\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$, которые упорядочивают массив. Каждому конкретному входу $\{a_1, \ldots, a_n\}$ отвечает его **реализация** — путь от корня к листу в D_A.

Совершенно аналогично дается определение разрешающего дерева для задачи поиска минимального элемента, поиска медианы и т. д. (все сводится к изменению пометок листьев). Мы сохраним для этих «специализированных» деревьев обозначение D_A. На языке разрешающих деревьев утверждение о том, что $T_{min} = n - 1$, эквивалентно следующему: в любом корректном алгоритме поиска минимального элемента в массиве из n чисел, использующем только попарные сравнения, каждый реализуемый путь от корня к листу имеет не менее $(n-1)$-го ребра.

Назовем это **утверждением** $\mathcal{A}$.

Произвольному корректному алгоритму A нахождения минимума попарными сравнениями и произвольному реализуемому пути P в разрешающем дереве D_A отвечает (неориентированный) граф $G_A^P = (V, E)$ на n вершинах, в котором есть ребро $(v_i, v_j) \in E$, если и только если в пути P какая-то вершина имеет пометку $a_i ? a_j$.

Утверждение $\mathcal{B}$. Для корректности алгоритма A нахождения минимума необходимо, чтобы граф G_A^P был связен.

Задача 46. $(2 \times 0.01 + 0.02)$ (i) Докажите импликацию: $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$.

(ii) Докажите утверждение $\mathcal{B}$.

Теперь дадим другое доказательство этой нижней оценки. Отметим, что само доказательство будет иллюстрацией методов **аммортизационного анализа** для получения нижних оценок.

Для этого запишем шаги алгоритма в формате конфигураций (a, b, c, d), где a элементов пока не сравнивались, b элементов были больше во всех сравнениях, c элементов были меньше во всех сравнениях, d были и больше, и меньше в сравнениях, т. е. начальная конфигурация такова: $Init = (n, 0, 0, 0)$. Введем "потенциальную функцию", определенную на конфигурациях: $f[(a, b, c, d)] = a + c$. Мы оценим трудоемкость алгоритма, просто поделив "разность потенциалов" между начальной и конечной конфигурациями на максимальное изменения потенциала за один шаг алгоритма.

(iii) Покажите, что при любом сравнении потенциал $f(\cdot)$ может уменьшиться не больше, чем на единицу, и что

отсюда вытекает, что число шагов любого такого алгоритма не меньше $n-1$.

Покажем, что любой алгоритм нахождения медианы массива из n элементов посредством попарных сравнений имеет сложность $T(n) = \frac{3n}{2} - O(\log n)$.

Задача 47. $(0.02+0.03)$ (i) Покажите, что любое разрешающее дерево поиска медианы позволяет также восстановить индексы всех элементов, бóльших медианы, и всех элементов, мéньших медианы.

Из этой задачи вытекает, что нахождение медианы эквивалентно с виду более сложной задаче: найти медиану и массив L элементов, бóльших ее $(\frac{n}{2}-1)$ элементов.

(ii) Покажите, что любое разрешающее дерево для медианы содержит путь от корня к листу длины $\frac{3n}{2} - O(\log n)$.

Комментарий. Можно использовать два соображения. Во-первых, если из дерева T для медианы выкинуть все сравнения, в которых участвуют элементы L, то получится дерево T_L поиска максимума (в нем максимум — это медиана). А из предыдущей задачи следует, что T_L должно иметь $\geq 2^{\frac{n}{2}-1}$ листьев. Во-вторых, массив L может быть произвольным, а отсюда можно получить оценку снизу на число листьев (и на высоту) T.

Наилучшие известные современные оценки: $(2+\varepsilon)n \leq T(n) \leq 2.95n$.

Задача Д–14. (0.03) **[Кормен 1, задача 10-1-2]** Рассмотрим стандартную рекурсивную процедуру одновременного поиска максимума и минимума **[Кормен 1, §10.1]**. Покажите, используя подходящую потенциальную функцию, что этот алгоритм является оптимальным по числу использованных сравнений.

Комментарий. Здесь начальная и конечная конфигурации таковы: $Init = (n,0,0,0)$, $Final = (0,1,1,n-2)$. Нужно показать, что необходимо не менее $k = \lceil \frac{3n}{2} \rceil - 2$ сравнений. В тексте можно использовать только аргументы, относящиеся к потенциальной функции. Нельзя апеллировать к авторскому представлению о том, что какие-то действия "неоптимальны". Формат ответа, как и для рассмотренного выше выбора минимального элемента, должен быть таков.

1. Потенциальную функцию $f(\cdot) = f(a,b,c,d)$ следует указать явно.
2. При любом сравнении значения $f(\cdot)$ не могут уменьшиться больше, чем на некоторую величину δ (скажем, единицу).
3. $f(Init) - k\delta = f(Final)$.
4. На самом деле, легко проверить, что в классе линейных функций такая потенциальная функция не существует, поэтому **нужно либо усложнить вид функции, либо считать, что функция определена только на части входов**.

Задача Д–15. $(0.03+0.03)$ (i) Дано n ключей и n замков. Все ключи и все замки различны между собой, а каждый ключ подходит к единственному замку. Ключи (и замочные скважины) упорядочены по величине, но визуально отличия неразличимы. На каждом шаге можно попытаться вставить конкретный ключ в конкретный замок и заключить, что он подходит или больше, или меньше искомого. Постройте вероятностный алгоритм подбора ключей, требующий в среднем $o(n^2)$ шагов.

Комментарий. Очевидно, что прямой перебор подходящих пар ключей и замков требует квадратичного числа шагов. Удивительным кажется то, что для этой задачи построен детерминированный $o(n^2)$-алгоритм. Он очень хитрый.

(ii) Покажите, что любая детерминированная процедура подбора ключей требует $\Omega(n \log n)$ шагов.

Структуры данных для динамической сортировки Манипуляции с деревьями

Литература: **[Кормен 1, гл. 18–19] или [Кормен 2, гл. 17–18], [АХУ], [Ш]**.

Изучим несколько структур данных древесного типа, которые позволяют эффективно динамически обращаться с упорядоченными массивами (т. е. нужно динамически поддерживать упорядоченный массив, считая, что элементы могут, например, добавляться и/или удаляться и пр.). Впервые подобную структуру данных, позволяющую выполнять удаления/вставки в n элементном массиве за $O(\log n)$ операций, предложили в 1963 году Г. Адельсон-Вельский и Е. Ландис[44]. Мы начнем изучение этой темы и рассмотрим несколько структур данных, позволяющих эффективно поддерживать динамические операции. При анализе трудоемкости опять очень полезным оказывается метод т.н. *амортизационного анализа*, т. е. вычисление трудоемкости не отдельной, а сразу целой серии операций.

Пусть x — двоичное дерева поиска[45]; обозначим $size[x]$ число ключей в поддереве с вершиной x. Выделим для $size[\cdot]$ поле в каждой вершине дерева. Пусть α — число и $1/2 \leq \alpha < 1$. Будем говорить, что вершина x дерева, не являющаяся листом, *α-сбалансирована*, если $size[[left[x]] \leq \alpha size[x]$ и $size[[right[x]] \leq \alpha size[x]$ ($left$ и $right$ — это указатели на левого и, соответственно, правого потомка x в двоичном дереве). Дерево называется *α-сбалансированным*, если все его внутренние вершины α-сбалансированы.

Задача 48. $(0.02+0.02)$ (i) Покажите из определения, что для *любой* вершины x 1/2-сбалансированного дерева выполнено:

$$size[[left[x]] - size[[right[x]] \in \{-1,0,+1\}$$

.

(ii) **[Кормен 1, задача 18.3 (б)]или [Кормен 2, задача17.3 (б)]** Покажите, что поиск элемента в α-сбалансированном двоичном дереве с n вершинами выполняется за $O(\log n)$.

В следующей задаче будет показано, что α-сбалансированные деревья можно эффективно динамически балансировать, т. е. осуществлять вставку и удалению можно за *учетное время* $O(\log n)$. О том, что такое учетное время тоже немного говорилось и ранее, но сейчас необходимо обязательно прочитать в **Кормене** начало главы 18 (I) (или 17 (II)).

Мы снова используем *метод потенциалов*.

Задача Д–16. $(0.02+0.01+0.03+0.03)$. **[Кормен 1, задача 18.3 (б)]или [Кормен 2, задача17.3 (б)]**
(i) Пусть x — вершина двоичного дерева поиска. Постройте алгоритм, использующий время $\Theta(size[x])$ и дополнительную память $O(size[x])$, для преобразования поддерева с корнем x в 1/2-сбалансированное дерево.

Далее считаем, что $\alpha > 1/2$, и после выполненных стандартным способом[46] операций удаления или вставки, следующим образом производится балансировка: выбирается самая высокая вершина результирующего дерева, которая перестала быть α-сбалансированной и все ее корневое поддерево перестраивается в 1/2-сбалансированное посредством алгоритма из пункта (i).

Используем метод потенциалов с потенциальной функцией:

[44] Отсюда и название самой структуры по первым буквам фамилий аторов — АВЛ-дерево.

[45] Что это такое?

[46] Контрольный вопрос: каким это таким стандартным способом?

$$\Phi(T) = c \sum_{x \in T\,:\,|\Delta(x)| \geq 2} |\Delta(x)|,$$

здесь T — двоичное дерево поиска, а $c > 0$ — достаточно большая константа, зависящая от α.

(*ii*) Покажите, что потенциал 1/2-сбалансированного дерева равен нулю.

(*iii*) Считаем, что реальная стоимость [в единицах потенциала] описанного в пункте (*i*) преобразования не α-сбалансированного поддерева T с m вершинами в 1/2-сбалансированное дерево равна m. Какой нужно выбрать константу c в зависимости от α, чтобы учетная стоимость такого преобразования T равнялась $O(1)$?

(*iv*) Покажите, что учетная стоимость удаления или вставки элемента в α-сбалансированное дерево с n вершинами равна $O(\log n)$.

Из предыдущей задачи вытекает, что для α-сбалансированных деревьев удаление или вставка выполняются эффективно в смысле учетной стоимости. Но можно построить другие более сложные древесные структуры данных, в которых эти операции теоретически выполняются быстрее. Например, в т.н. *фибоначчиевых* кучах **[Кормен 1, гл. 21] или [Кормен 2, гл 20]** удалить или вставить элемент удается с учетной стоимостью $O(1)$. Но, как и всегда, платой является более сложная организация программы. В ранее упомянутых АВЛ-деревьях[47] добавление требует $O(1)$, а удаление — $O(\log n)$ операций, но **в наихудшем случае**. В определенном смысле и фибоначчиевы кучи, и АВЛ-деревья входят в теормининимум по крайней мере для физтехов, претендующих на высокую оценку. Амортизационный анализ фибоначчиевых деревьев требует достаточно тонких аргументов, и его полезно посмотреть для закрепления изложенного материала.

Задание на 11-ю неделю: 17.04–23.04. [0.15] Потоки и разрезы. Раздел 10 программы Литература: [Кормен 1], [Кормен 2, гл 26], [ДПВ]

Повторение: анализ сложности алгоритма Quicksort

Рассмотрим алгоритм быстрой сортировки с каким-нибудь детерминированным выбором "барьерного элемента". Обозначим через $\mathrm{t}(A_n)$ время работы алгоритма на массиве A_n длины n. По определению, средним временем работы алгоритма называется величина

$$\mathbb{E}\mathrm{t}(\mathrm{n}) = \frac{1}{n!} \sum_{A_n} \mathrm{t}(A_n). \qquad (4)$$

На эту формулу можно взглянуть и немного по-другому. *Если считать равновероятными все $n!$ возможных способов упорядочения входного массива длины n*, то среднее время работы алгоритма, заданное формулой выше,— это, опять по определению, *математическое ожидание* времени работы алгоритма. Определим рекурсивную процедуру сортировки типа Quicksort, которую мы назовем Permsort следующим образом. *Сначала алгоритм случайным образом переставляет элементы текущего массива, причем таким образом, чтобы все возможные перестановки были равновероятны*[48], *а потом сортирует массив, выбирая барьерный элемент каким-то стандартным способом, например, используя самый правый.*

Задача 49. (2 × 0.02) (*i*) Покажите, что для среднего времени работы алгоритма Permsort справедливо рекуррентное соотношение.

$$\mathbb{E}\mathrm{t}(n) = \Theta(n) + \frac{1}{n}(\mathbb{E}\mathrm{t}(0)+\mathbb{E}\mathrm{t}(n-1)) + \frac{1}{n}(\mathbb{E}\mathrm{t}(1)+\mathbb{E}\mathrm{t}(n-2)) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{n}(\mathbb{E}\mathrm{t}(n-2)+\mathbb{E}\mathrm{t}(1)) + \frac{1}{n}(\mathbb{E}\mathrm{t}(n-1)+\mathbb{E}\mathrm{t}(0)) =$$
$$= \Theta(n) + \frac{2}{n}(\mathbb{E}\mathrm{t}(1) + \mathbb{E}\mathrm{t}(1) + \ldots + \mathbb{E}\mathrm{t}(n-1)). \qquad (5)$$

Комментарий. (Возможный вариант решения.) Считаем, что время работы алгоритма на конкретном входе пропорционально числу проведенных сравнений[49]. *Нужно понять, что, по определению, в* (4) *записана сумма средних значений, т. е. сумма сумм. Теперь формулу* (5) *можно получить, изменяя порядок суммирования.*

(*ii*) Используя эту рекурренту, покажите, что $\mathbb{E}\mathrm{t}(n) = \Theta(n \log n)$.

В стандартном алгоритме Quicksort с рандомизацией при каждом (рекурсивном) обращении барьерный элемент выбирается случайным образом, причем равновероятно. Во всех изданиях **[Кормен]** проводится подробный анализ среднего времени работы алгоритма, но в **[Кормен 1]** описан специальный прием, который и будет проанализирован в следующей задаче.

Переопределим выбор случайного барьерного элемента следующим образом Будем считать, что изначально каждому элементу приписывается **ранг** — целое число от 1 до n. А выбор барьерного элемента будем проводить, выбирая каждый раз из текущего массива элемент "с минимальным рангом"[50].

Приведем цитату из **[Кормен 1]**: "Можно проверить, что это равносильно независимым выборам элементов на каждом шаге: *на первом шаге каждый из элементов может быть выбран с равной вероятностью, после такого выбора в каждой из групп все элементы также равновероятны и т.д.*"

Задача 50. (0.02) Обоснуйте эквивалентность обоих способов выбора, т. е. проверьте корректность утверждения выделенного курсивом в цитате выше.

Используя "ранги", легко вывести, что в алгоритме Quicksort элементы, которые после упорядочения попадают на i-е и j-е место, соответственно ($i \neq j$), сравниваются в $p_{ij} = \frac{2}{|i-j|+1}$-й доле случаев, что сразу дает оценку для трудоемкости в среднем: $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1} = O(n \log n)$.

Задача 51. (0.01) Покажите, что если в любой модификации алгоритме Quicksort в качестве барьерного элемента использовать медиану текущего массива, причем искать ее посредством стандартного линейного алгоритма, то его сложность по наихудшему случаю станет $O(n \log n)$.

Потоки

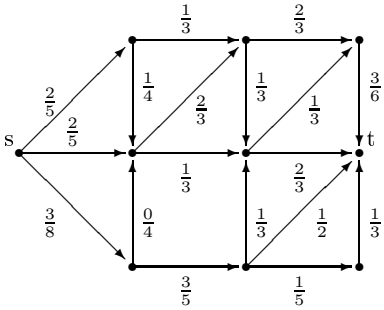
Задача 52. ($3 \times 0.01 + 0.02 + 0.01$) На рисунке изображен потоковый граф (метка $\frac{f}{u}$ на ребре означает поток и пропускную способность, соответственно).

[47] Как обычно, рекомендую посмотреть книгу **[Ш]**. Она имеется в открытом доступе на сайте www.mccme.ru, и, хотя автор декларирует, что она написана для школьников, но объем, ясность и глубина изложенного в ней материала значительно превосходит стандарты изучения информатики в вузах.

[48] О том, что под этим выражением понимается формально, и как реализовать такую процедуру за линейное время, написано в **[Кормен 2, §5.3]**.

[49] В изданиях **[Кормен]** выше второго аналогичный факт явно формулируется и доказывается для стандартного алгоритма Quicksort.

[50] Трюк этот совсем нетривиальный: вместо того, чтобы каждый раз вызывать подпрограмму RANDOM, вы генерируете случайную перестановку и в дальнейшем используете только ее.



(*i*) Чему равен поток f?

(*ii*) Изобразите остаточный граф, соответствующий потоку f.

(*iii*) Максимален ли поток f?

В следующих двух пунктах нужно по шагам применить метод[51] Форда-Фалкерсона, доведя его до алгоритма. **При отсутствии алгоритма (например, если увеличивающие пути находятся методом "внимательного рассмотрения" потокового графа или если разрез просто отгадывается) задача не оценивается.** ***'Это требование будет тем более актуально при написании тестов.***

Метод остаточных графов из книг **[Кормен 1]** или **[Кормен 2]** аналогичен оригинальному методу пометок Форда- Фалкерсона, изложенному в их книге

(*iv*) С помощью алгоритма Форда-Фалкерсона по шагам найдите максимальный поток. На каждом шаге должен быть построен остаточный граф и указан увеличивающий путь.

(*v*) Укажите модификацию алгоритма Форда-Фалкерсона для нахождения минимального разреза. По шагам постройте минимальный разрез между s и t. Найдите его пропускную способность.

Задача 53. (0.02 + 0.01) В больнице каждому из 169 пациентов нужно перелить по *одной дозе* крови. В наличии имеется 170 доз. Распределение по группам таково.

Группа	I	II	III	IV
В наличии	45	32	38	55
Запрос	42	39	38	50

При этом пациенты, имеющие кровь группы I, могут получать только кровь группы I. Пациенты, имеющие кровь группы II (группы III), могут получать только кровь групп I и II (групп I и III, соответственно). Наконец, пациенты с IV группой могут получать кровь любой группы.

(*i*) Распределите дозы, чтобы обслужить максимальное число пациентов с помощью *решения подходящей задачи о максимальном потоке*. Решение нужно аккуратно оформить: должна быть нарисована потоковая сеть и показаны все шаги алгоритма ФФ, начиная с нулевого потока, т. е. должны быть построены остаточные графы и показаны увеличивающие пути.

(*ii*) Если всех пациентов обслужить нельзя, то приведите *простое* объяснение этому, *доступное администрации* больницы.

Задача 54. (0.01) Покажите на примере конкретной сети, что алгоритм Форда-Фалкерсона не является полиномиальным.

[51] Отметим, что выражение "метод" употребляется не случайно (некоторые этапы описаны неявно или подразумеваются). **Вы должны самостоятельно придумать, как дополнить процедуру до алгоритма.**

Рассмотрим следующую задачу Сеть. Дан ориентированный граф $G = (V, E)$, дугам которого приписаны неотрицательные числа $l_i \le u_i, i \in E$. Нужно проверить, можно ли приписать ребрам числа $F = \{f_i, i \in E\}$, чтобы в любой вершине v была нулевая дивиргенция $div\, F = \sum_{\text{по входящим в v ребрам}} f_i - \sum_{\text{по выходящим из v ребрам}} f_j = 0$ и выполнялись неравенства $l_i \le f_i \le u_i, i \in E$.

Задача 55. (0.01 + 0.02) Покажите, как можно решить задачу Сеть с помощью решения подходящей задачи о максимальном потоке в сети и наоборот.

Задача 56. (0.01) Рассмотрим следующую задачу. В потоковой сети нет ограничений пропускной способности на дугах, но есть ограничения пропускной способности вершин. Формально, для каждой вершины v, отличной от истока и стока, задано целое неотрицательное число $c(v)$, и для потока в сети должно выполняться

$$\sum_u f(u, v) = \sum_u f(v, u) \le c(v).$$

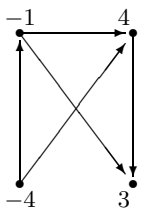
Опишите алгоритм нахождения максимального потока в такой сети.

Задача Д–17. (0.02) Задан двудольный неориентированный граф, в котором обе доли имеют n вершин, а степени (количество инцидентных рёбер) всех вершин равны d, **т.е. однородный двудольный граф степени** d. Приведите полиномиальный алгоритм, который раскрасит рёбра в d цветов так, чтобы из каждой вершины исходили рёбра разных цветов. Оцените сложность предложенного алгоритма.

Задача Д–18. (0.02) На вход задачи подаётся ориентированный граф $G = \langle V, E\rangle$ без контуров (ориентированных циклов). Необходимо покрыть его наименьшим числом простых путей, т. е. найти наименьшее количество не пересекающихся по вершинам простых путей, чтобы каждая вершина принадлежала одному из них. Допускаются пути нулевой длины (состоящие из одной вершины). Предложите полиномиальный алгоритм.

Задание на 12-ю неделю: 24.04–30.04. [0.15] Потоки и разрезы. Алгоритмы на графах Разделы 10–11 программы Литература: [Кормен 1], [Кормен 2, раздел 6], [ДПВ]

Задача 57. (0.02 + 0.01 + 0.02) Последовательность выполнения проектов задана ациклическим орграфом $G = (V, E)$ (если в орграфе есть ребро (u, v), то проект v не может начаться, пока не будет выполнен проект u). Выполнение проекта v приносит прибыль $p(v)$ (она может быть и отрицательна). Требуется выбрать подмножество проектов, приносящих максимальную суммарную прибыль, т.е. найти такое подмножество проектов $M \subseteq V$, что $M = argmax_{S \subseteq V}\{p(S) \stackrel{def}{=} \sum_{v \in S} p(v)\}$.



Оказывается, что эту задачу можно свести к задаче о минимальном разрезе. **Конструкция.** *Дополняем граф G источником s и стоком t, и задаем* **бесконечные** *пропускные способности на ребрах G. Далее, для всех вершин $v \in V$, если $p(v) < 0$, то задаем ребро (s, v) с пропускной способностью $-p(v)$, а если $p(v) > 0$, то задаем ребро (v, t) с пропускной способностью $p(v)$.*

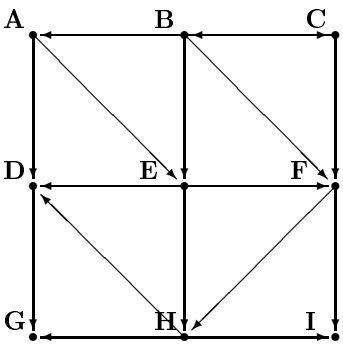
(*i*) С помощью алгоритма Форда-Фалкерсона найдите максимальный поток в полученной сети. Начальный поток нулевой. Приведите подробное описание: на каждом шаге процедуры на вспомогательных чертежах изобразите остаточные графы и укажите увеличивающие пути.
(*ii*) Затем, используя алгоритм Форда-Фалкерсона, найдите минимальный разрез.
(*iii*) Обоснуйте конструкцию в общем случае.

Поиск в глубину и поиск в ширину

Комментарий (особенно он предназначен для студентов, которые знают — или считают, что знают, — что такое поиск в ширину или в глубину). *Здесь мы изучаем качественные свойства указанных процедур, чтобы понять какую информацию о графе мы дополнительно получаем, когда запускаем один из этих естественных и с виду совершенно бесхитростных обходов вершин. В качестве простейшего контрольного вопроса можно спросить, почему обе процедуры* **линейные по входу**, *т. е. линейные по длине естественной кодировки графа: числу вершин и ребер. Вы должны быть аккуратны с ответом, например, уже потому, что обе процедуры предусматривают возвраты, так что каждая вершина или ребро может просматриваться не один раз.*

Если специально не оговорено, то рассматриваются графы без петель и кратных ребер (простые).

Задача 58. (0.02) Проведите поиск в глубину в графе на рисунке.



Используйте алфавитный порядок вершин. Укажите типы всех дуг графа и вычислите для каждой вершины значение функций $d(\cdot)$ и $f(\cdot)$.

Согласно Теореме 23.4 из книги **[Кормен 1]**, процедура *поиска в ширину*, начиная с данной вершины s, в графе[52] присваивает просматриваемым вершинам отметки, равные *кратчайшему пути (длина = число ребер)* от s.

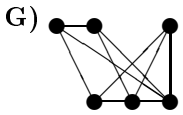
Задача 59. (0.02 + 0.01) (*i*) Докажите или опровергните, что следующее условие дает критерий, когда остовное дерево $F \subseteq G$ является *деревом некоторого поиска в ширину* связного неориентированного графа G.

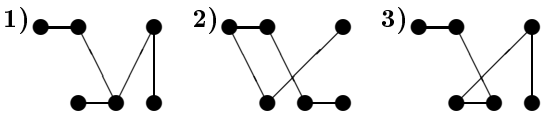
Остовное дерево $T \subseteq G$ является **деревом некоторого поиска в ширину** *связного неориентированного графа G, если и только если в нем можно выбрать одну из вершин s за корень так, чтобы T было деревом кратчайших путей из s в графе G. Иными словами, путь по дереву из s в произвольную вершину t содержит не больше ребер, чем кратчайший путь между s и t в G.*

Если в настоящем виде критерий неверен, то модифицируйте его до корректного.
(*ii*) В соответствии с полученным в предыдущем пункте критерием установите, какие из нарисованных деревьев являются деревьями поиска в ширину.

[52] Или в ориентированном графе.

Формат ответа. Пусть, скажем, критерий верен, тогда при положительном ответе нужно указать корень дерева кратчайших путей, а при отрицательном — для каждого возможного выбора корня нужно указать вершину, расстояние которой до корня в графе меньше, чем соответствующее расстояние по дереву.





Связность

Связностью или вершинной связностью $\kappa(G)$ неориентированного графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых превращает граф в несвязный или тривиальный. **Реберной связностью** $\lambda(G)$ графаG называется наименьшее число ребер удаление которых превращает граф в несвязный или тривиальный.

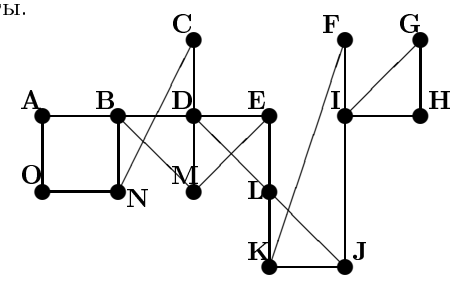
Максимальный по включению k-(реберно) связный подграф графа G называется его k- компонентой (соответственно, k-реберной компонентой). Обычно предполагается, что k-компонента имеет не менее $k+1$ вершин.

Задача 60. (0.01 балла) Покажите, что для любого G $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ ($\delta(G)$ — это минимальная степень вершин G).

Задача 61. (2×0.02 баллов) Постройте полиномиальный алгоритм или покажите NP-полноту проверки (*i*) k-связности и проверки (*ii*) k-реберной связности графа (k — двоичное число).

Точка раздела связного неориентированного графа G — это вершина, удаление которой делает граф несвязным. **Мост** — это ребро с аналогичным свойством. **Двусвязная компонента** связного графа содержит ≥ 3 вершин (или ≥ 2 ребер) и состоит из максимального набора ребер, в котором каждая пара ребер принадлежит общему простому (несамопересекающемуся) циклу.

Задача 62. (0.01) Для графа, изображенного на рисунке, укажите точки раздела, мосты и двусвязные компоненты.



Сильная связность

Задача Д–19. (2×0.02) Дана выполнимая 2-КНФ φ, каждый дизъюнкт которой содержит ровно два различных литерала (литерал и его отрицание считаются различными). Будем говорить, что φ 1-*минимальна*, если к

ней можно добавить один дизъюнт, содержащий два различных литерала так, чтобы она стала невыполнимой.
(*i*) Докажите или опровергните, что следующеее условие является критерием 1-минимальности.

Рассмотрим ориентированный граф G_φ, в котором литералы и их отрицания являются вершинами, а каждый дизъюнкт порождает пару ребер вида: $x \vee y \Rightarrow [e_1 = (\neg x, y), e_2 = (\neg y, x)]$.

φ является 1-минимальной тогда и только тогда, когда в G_φ есть путь P, соединяющий противоположные литеральные вершины, $x \rightsquigarrow y$, $x = \neg y$ и имеется ребро, ведущее из вершины y в вершину $z \notin P$.

Если в указанном виде критерий не верен, то дополните его до корректного.
(*ii*) Постройте для задачи проверки 1-минимальности как можно более быстрый полиномиальный алгоритм.
Подсказка. Полезно вспомнить, полиномиальные алгоритмы проверки выпоолнимости 2-КНФ.

Задача Д–20. (0.03) Постройте линейный по входу алгоритм, который, имея на входе граф G и некоторое его остовное дерево T, определяют, является ли T деревом поиска-в-ширину при старте с некоторой вершины G.

Задача Д–21. ($2\times0.01+0.02+0.01+2\times0.02$) **Линейный алгоритм разбиения графа на двухсвязные компоненты**
(*i*) Покажите, что множества вершин, принадлежащие двум разным двусвязным компонентам, либо не пересекаются, либо имеют единственную общую вершину — точку раздела.

Построим по G новый граф G_b, в котором имеются вершины двух типов: v_a, отвечающие точкам раздела G, и v_b, отвечающие двусвязным компонентам G. Ребра G_b соединяют каждую вершину v_b со всеми вершинами v_a, попадающими в двусвязную компоненту, отвечающую v_b.
(*ii*) Покажите, что G_b — дерево, и постройте соответствующее дерево для G из задачи **№ 62**.

Оказывается, что точки раздела можно находить по дереву поиска в глубину. Затем, опять используя поиск в глубину, можно определить все двусвязные компоненты, т. е. двусвязные компоненты можно находить за линейное время. Мы ограничимся только алгоритмом выделения точек раздела графа.
(*iii*) Докажите, что корень дерева поиска в глубину является точкой раздела тогда и только тогда, когда у него больше одного потомка.
(*iv*) Постройте контрпример к следующему утверждению из книги **[Кормен 1, задача № 23-2 (б)]**: отличная от корня вершина v дерева поиска в глубину является точкой раздела, если и только если в дереве поиска в глубину не существует обратного ребра от потомка v (включая саму v) до собственного предка v (т. е. отличного от самой v).
(*v*) **[Кормен 1, упр. 23-2(в)]**.

Определим функцию $low(v) = \min[d(v), d(w)$, *если для некоторого потомка и вершины v в G есть обратное ребро* $(u, w)]$.

Покажите, как вычислить $low(\cdot)$ за время $O(|E|)$ [например, модифицируя поиск в глубину].

(*vi*) Покажите, как в линейное время вычислить все двусвязные компоненты графа[53]

[53] **Подсказка.** Сначала, используя решение предыдущих задач, покажите, как с помощью поиска в глубину идентифицировать все точки раздела за линейное время. Этот факт и свойства функции $low(\cdot)$ позволяют находить двусвязные компоненты при поиске в глубину, например, используя дополнительный стек. Можно также находить двусвязные компоненты другим способом, выделяя мосты графа (см. **[Кормен I, упр. 23-2(д)–(з)]**).

Задание на 13-ю неделю: 1.05–8.05. [0.15]
Алгоритмы на графах II
Разделы 10–11 программы
Литература: [Кормен 1], [Кормен 2], [ДПВ], [АХУ]
Алгоритмы на графах II

k-связность графов
Краткий конспект

В этом конспекте сформулированы утверждения, которые в принципе можно доказать, используя потоки в сетях.

Сначала мы будем рассматривать только неориентированные графы.

Вершинной (соответственно, реберной) связностью $\kappa(G)$ (соответственно, реберной $\lambda(G)$) называется наименьшее число вершин (ребер), удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. .

В предыдущем задании мы установили неравенство $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ ($\delta(G)$ — максимальная степень вершин графа G).

Граф G называется вершинно n-связным или просто n-связным (соответственно, реберноно n-связным), если $\kappa(G) \geq n$ ($\lambda(G) \geq n$). Нетривиальный граф 1-связен, тогда и только тогда, когда он связен, и 2-связен, если и только если в нем более одного ребра и он не имеет точек сочленения. Например, полный граф K_2 не является 2-связным.

Попробуйте в качестве упражнения доказать, что граф двусвязен, тогда и только тогда, когда в нем любые две вершины принадлежат простому циклу.

Теоремы Менгера

Пусть u и v — две различные вершины связного графа G. Две простые цепи, соединяющие u и v, называются вершинно-непересекающимися, если у них нет общих вершин, отличных от u и v и реберно-непересекающимися, если у них нет общих ребер. Множество S вершин, ребер или вершин и ребер разделяет u и v, если u и v принадлежат различным различным компонентам графа $G \setminus S$.

Теорема 4 (Карл Менгер (1927)) *Наименьшее число вершин, разделяющих вершины u и v, равно наибольшеиу числу непересекающихся простых u–v цепей.*

Теорема 5 (Форд–Фалкерсон, Элайес–Файнштейн–Шеннон) *Для любых двух вершин графа наибольшее число реберно-непересекающихся цепей, соединяющтх их, равно наименьшему числу ребер, разделяющих эти вершины.*

Теорема 6 (Хасслер Уитни) *Граф n-связен тогда и только тогда, когда любая пара его вершин соединена не менее, чем n вершинно-непесекающимися путями.*

Теорема 7 *Граф реберно n-связен тогда и только тогда, когда любая пара его вершин соединена не менее, чем n реберно-непесекающимися путями.*

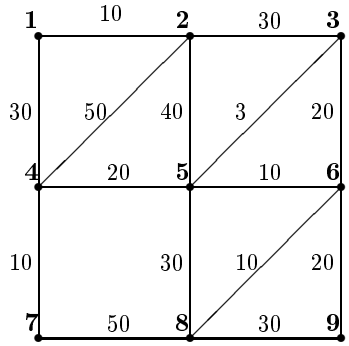
Теорема 8 *Наибольшее число непересекающихся цепей, соединяющих два непустых непересекающихся вершин V_1 и V_2, равно наименьшему числу вершин, разделяющих V_1 и V_2.*

Назовем линией матрицы любую ее строку или столбец. Пусть M — $\{0,1\}$-матрица. Набор единичных элементов матрицы называется независимым, если никакая пара не лежит в общей линии.

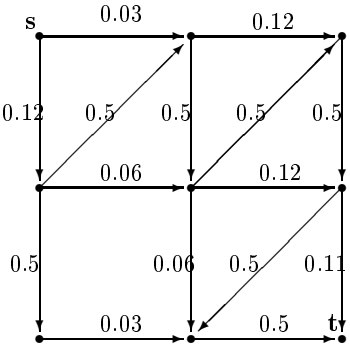
Теорема 9 *В любой бинарной матрице наибольшее число независимых единичных элементов равно наименьшему числу линий, поекрывающих все единицы.*

Кратчайшие пути и связывающие сети

Задача 63. (2×0.01) Найдите минимальное остовное дерево взвешенного графа G, изображенного на рисунке, с помощью алгоритмов Прима и Краскала. (Изобразите графы, полученные на трех последовательных итерациях алгоритмов.)



Задача 64. $(2 \times 0.02 + 0.03)$ Коммуникационная сеть является ориентированным графом, причем каждому ребру (каналу связи) (u, v) приписано число $r(u, v)$— "надежность соединения", где $0 \le r(u, v) \le 1$, так что $1 - r(u, v)$ можно рассматривать как вероятность разрыва соединения при передаче. В первом приближении считаем, что "вероятности" $r(u, v)$ независимые, и таким образом, надежность передачи сообщения по пути $v_1, \ldots, v_k$ равна $\prod_{i=1}^{k-1} r(v_i, v_{i+1})$.



(i) Постройте эффективный алгоритм нахождения наименее надежного пути в сети между вершинами s и t и укажите класс сетей, в которых алгоритм будет эффективным.
(ii) Проведите вычисления по вашему алгоритму для сети, изображенной на рисунке.
(iii) Постройте наименее надежную сеть, позволяющую передавать сообщения из вершины s в любую другую вершину графа, содержащую **минимальное** число дуг. Под *надежностью* сети понимается произведение надежностей всех входящих в нее дуг.

Вершины ориентированного **грид-графа** расположены в целых точках плоскости: $V(G) = \{(i, j), i = 0, \ldots, m, j = 0, \ldots, n\}$, а дуги соединяют соседние точки: $E(G) = \{[(i, j) \to (i + 1, j)], i = 0, \ldots, m - 1, j = 0, \ldots, n$ или $[(i, j) \to (i, j + 1)], i = 0, \ldots, m, j = 0, \ldots, n - 1\}$, причем дугам G приписаны целочисленные веса. Рассмотрим задачу поиска экстремального (самого "тяжелого" или самого "легкого") пути между вершинами $(0, 0)$ и (m, n) (по определению, вес пути равен сумме весов входящих в него ребер). В таком виде — это типичная задача так называемого "динамического программирования", описанная во многих источниках. Для нее легко придумать оптимальный $O(mn)$-алгоритм

Задача 65. $(2\times0.01+0.5)$ (i) Постройте $O(mn)$-алгоритм поиска экстремального пути.
(ii) Покажите, что ваш алгоритм оптимальный по сложности, поскольку любой алгоритм, решающий задачу, обязан прочитать вход (таблицу весов, размер которой равен mn). Иначе говоря, нужно показать, что ответ существенно зависит от каждого входного параметра.
(iii) (Это задача **№ Д13 из методички**.) Пусть теперь веса всех горизонтальных дуг $[(i, j) \to (i + 1, j)]$ зависят только от j, а веса всех вертикальных дуг $[(i, j) \to (i, j + 1)]$ зависят только от i. Таким образом, веса полностью заданы, если указаны n "горизонтальных" весов u_j и m "вертикальных" весов v_i, и длина входа равна в этом случае $O(m + n)$.

Постройте оптимальный линейный $O(m+n)$-алгоритм вычисления экстремальных путей для этого класса грид-графов.

Структуры UNION-FIND
Амортизационный анализ

Для эффективной реализации алгоритма Краскала нужно научиться эффективно обрабатывать непересекающиеся множества. Для этого был придуман специальный алгоритм, который при опросе на одной референтном профессиональном сайте с большим отрывом был признан наиболее выдающимся (это, видимо, достаточный повод, чтобы с ним ознакомиться).

Мы хотим реализовать следующие операции над множествами.

- $MAKESET(x)$ — создать множество с единственным элементом x;
- $UNION(x, y)$ — заменить множества с именами x и y их объединением
- $FIND(x)$ — возвратить имя множества, содержащего элемент x;
- $LINK(x, y)$ — (x и y — корни) перевесить указатель корня x на корень y; в этих обозначениях $UNION(x, y) = LINK(FIND(x), (FIND(y))$.

Можно действовать совсем бесхитростно и считать, что множества — это, например, связные списки, имеющие специальный указатель на *имя множества*. Тогда, грубо говоря, поиск, объединение и пр. пропорционален (суммарному) размеру участвующих в операции множеств. Понятно, что это может быть весьма медленным. Попробуем действовать чуть похитрее (и замечу, вполне практически разумно. Для этого введем специальную характеристику множества: его размер и будем при объединении присваивать *ме́ньшему* множеству имя *бо́льшего*.

Внимание! При решении следующей задачи вы должны уточниить детали и описать конкретную структуру данных и алгоритм, реализующий это предложение!. Предполагается, что все множества являются подмножествами $\{1, \ldots, n\}$ **и над ними проводятся только операциий** UNION-FIND, **причем объединяются только непересекающиеся множества.**

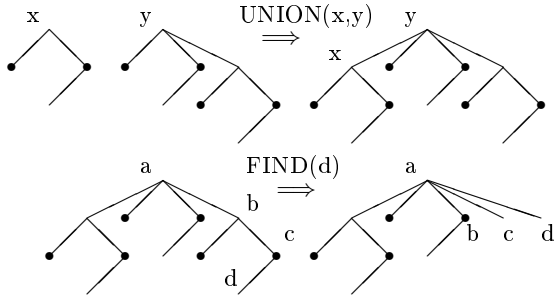
Задача 66. (0.04) Постройте алгоритм, который выполняет $(k \le n - 1)$ операций UNION и m операций FIND и имеет трудоемкость $O(\max(m, n \log n))$.

Если $m = O(n \log n)$, то построенный в предыдущей задаче алгоритм является оптимальным по трудоемкости, но, если $m = O(n)$, то процедуру можно ускорить и предложить алгоритм, выполняющую $O(n)$ операций UNION-FIND за почти линейное время. Для

этого вместо связного списка нужно представлять множества лесом корневых (ориентированными) деревьев, ребра которых (указатели в вершинах) направлены к предку. Корень отождествляется с именем множества и его указатель замкнут на себя. Будем считать, что трудоемкость операции FIND равна числу просмотренных в дереве элементов, т. е. не превышает высоты дерева, а сложность UNION равна сложности двух операций FIND. Если теперь использовать изложенный выше прием и при объединении перемещать указатель корня в дереве ме́ньшей высоты на корень дерева бо́льшей высоты, то можно получить следующий результат (опять в силе остается требование формального описания структуры данных, алгоритма и оценки его трудоемкости)

Задача Д–22. (0.03) Постройте алгоритм, который выполняет $O(n)$ операций UNION и FIND и имеет трудоемкость $O(n \log n)$.

Важно понять, что предыдущий результат был получен потому, что нам удалось поддерживать структуру данных, в которой представляющие множества деревья имеют маленькую высоту. Сам прием объединения деревьв по высоте, называтся алгоритмом ОБЪЕДИНЕНИЯ ПО РАНГУ, и, как мы видим, он и практичен, и достаточно эффективен. Но оказывается, что если дополнить его еще одной процедурой, называемой СЖАТИЕ ПУТЕЙ, то мы получим для той же задачи еще более быстрый, почти линейный алгоритм, который и возглавляет список "Алгоритмов из КНИГИ". На самом деле, такая высокая оценка, видимо, дается не только за элегантность процедуры, но и за очень интересный метод оценки трудоемкости. Неформально, первая процедура "привешивает" более низкие деревья с меньшей высотой (=рангом) к более высоким, а вторая,— при поискее любого элемента дерева сразу перевешивает его указатель на корень, как показано на рисунке.



Формальное описание следующее.

```
procedure MAKESET(x)
p(x):=x
rank(x):=0
end

function FIND(x)
if x не равно p(x) then
p(x):=FIND(p(x))
Выполняем сжатие путей, т. е. направляем на
корень указатели всех элементов в пути от корня до x
return(p(x))
end

function LINK(x,y)
if rank(x))>rank(y) then  обменять x и y местами
if rank(x)=rank(y) then rank(y):=rank(y)+1
p(x):=y
return(y)
end

procedure UNION(x,y)
LINK(FIND(x),FIND(y))
end
```

Заметим, что каждая операция FIND или UNION для множеств из n элементов может выполняться за время $O(\log n)$, Но ниже, **используя, как в свое время было обещано, амортизационный анализ**, мы покажем, что выполнение m операций FIND или UNION требует не более $O((m+n)\log^* n)$ операций. А на самом деле, и еще меньше: вместо $\log^* n$ можно поставить обратную к функции Аккермана, рост которой совершенно ничтожен даже по сравнению с $\log^* n$.

Изучим свойства ранга.

- по определению, если $v \neq p(v)$, то $rank(p(v)) > rank(v)$;
- по определению, если $p(v)$ изменяется, то $rank(p(v))$ увеличивается.

Задача 67. (3×0.01) (i) Докажите, что число элементов ранга k не превышает $\frac{n}{2^k}$.
(ii) Докажите. что число элементов ранга $\geq k$ не превышает $\frac{n}{2^{k-1}}$.
(iii) Докажите, что ранг произвольного элемента не превышает $\log n$.

Теперь используем амортизационный анализ, и будем оценивать трудоемкость не одной, а сразу m операций FIND или UNION. Поскольку, как мы уже говорили, последняя выражается через LINK и две операции FIND, то достаточно оценить сложность $2m$ операций FIND (LINK, требует $O(1)$ операций).

Но сначала нужно понять, в чем основная трудность. Дело в том. что FIND *— рекурсивная процедура. Кроме того, и это выглядит не только угрожающим, но и совершенно безнадежным, нам нужно оценить трудоемкость процедуры, в которой текущий лес, представляющий систему непересекающихся множеств, изменяется с каждой операцией (и тем самым изменяются трудоемкость конкретных поисков и обьединений).*

Ниже будет приведен набросок оценки. Его нужно продумать, ибо он нетривиальный и содержит тонкие места. Грубо говоря, мы применим хитрый бухгалтерский трюк: мы разделим алгоритм на этапы, через которые должна проходить любая операция, и будем оценивать трудоемкость каждого этапа сразу для всех m операций. Поскольку речь идет о том, что нужно оценить сложность последовательности операций FIND, т. е. длину путей в соответствующих деревьях, то этапы заключаются в разделении всего возможного диапазона высот деревьев на части и подсчет операций в каждой части.

Формальная конструкция. Ранг элемента не меняется, как только он перестает быть корневым. Разделим все некорневые элементы на группы по величине их ранга r, причем отнесем в группу i все элементы, для которых выполнено равенство $\log^* r = i$, т. е. в i-ю группу попадут элементы с рангами из полуинтервала $(2^{i-1}, 2^{2^{i-1}}]$. Ниже будем использовать сокращение $k = 2^{i-1}$.

Задача 68. (2×0.01) (i) Покажите. что число различных групп не превышает $\log^* n$.
(ii) Число элементов в i-й группе не превышает $\frac{n}{F(i)}$.

Теперь используем следующие обозначения, пусть $\Sigma = \{\sigma_i,\ i = 1\ldots, m\}$, где σ_i — это i-й оператор FIND последовательности Σ длины m. σ_i индуцирует путь L_i в соотвествующем текущем дереве от найденного элемента до корня. Формула ниже обслуживает сразу великое множество допустимых последовательностей FIND, и, что выглядит совершенно неправдополобным,— ее удается проанализировать. Итак, подсчитаем для любой последовательности Σ следующую величину (знак "$\rightarrow$"над суммой, говорит о том, что величины зависят от порядка операторов, которые изменяют деревья в процессе поиска).

$$\vec{\sum}_{\sigma_i \in \Sigma} [\text{ число таких } (u \in L_i) \wedge (u, p(u)) \text{ из одной группы }] +$$
$$\vec{\sum}_{\sigma_i \in \Sigma} [\text{ число таких } (u \in L_i) \wedge (u, p(u)) \text{ из разных групп или u — корень}].$$

Пояснение. Понимать это выражение можно следующим образом. Давайте мысленно покрасим каждый оператор FIND и все рекурсивные вызовы (путь по дереву к корню), которые он порождает, своим цветом, так что можно говорить о траектории. Конечно, достаточно, скажем, изменить первый оператор в последовательности и вся картинка (и траектории), возможно, изменится. Тем не менее, каждая траектория пересекает границы групп (число таких ребер-пойнтеров подсчитывается во второй сумме) и, кроме того, поскольку, по построению, при сжатии путей ранги родителей монотонно возрастают по крайней мерее на единицу, то любой элемент из i-й группы может быть подвергнут процедуре сжатия путей не более $F(i)-F(i-1)$ раз, прежде чем он получит родителя из следующей группы (и тогда трудоемкость просмотра элементов будет учитываться во второй сумме).

Вторая сумма оценивается как $O(m\log^* n)$ **просто потому. что число групп (уровней) по построению** $O(\log^* n)$**, а мы подсчитываем,"события", когда ребра-пойнтеры пересекают границы групп**. А первую сумму можно оценить следующим образом. Число операций, которым может подвергаться отдельный элемент внутри группы по порядку равен его рангу

$$\sum_{\text{по всем группам}} [\text{число элементов в группе}]\times$$

$$[\text{максимальный ранг элементов группы}] \le \sum_{k=1}^{\log^* n} \frac{n}{F(k)}F(k) \le n\log^* n,$$

откуда получаем требуемую трудоемкость $O((m+n)\log^* n)$.

Задание на 14-ю неделю: 9.05–15.05. [0.1] Вероятностный алгоритмы Разделы 12 программы Литература: [Кормен 2, §5 и дополнение C] [Кормен 1, §6], [GL], [ДПВ], [К-Ф], [К-Ш-В]

Краткий конспект

В этом задании мы рассмотрим процедуры, использующие *рандомизацию*. Но мы не будем делать *никаких априорных предположений о входном распределении*,

Мы уже обсуждали как минимум три подобные процедуры (быструю сортировку, поиск медианы и проверку простоты), использующие бросание монетки (вероятностный алгоритм) и перейдем теперь к их формальному описанию. К сожалению, из-за недостатка времени мы успеем только ознакомиться с определениями и решить несколько задач. Но можно без преувеличения сказать, что вероятностные подходы к алгоритмам являются стержнем многих современных исследований[54]. Представить без них мир алгоритмов совершенно невозможно, так что всем заинтересованым лицам будет нелишне продолжить изучение этого подхода самостоятельно.

И основной лозунг, под которым оформлено это задание звучит так.

К возможности использования случайных битов нужно относиться как к дополнительному вычислительному ресурсу, позволяющему иногда существенно понизить трудоемкость и концептуально упростить процедуру.

Основным источником таких возможностей является (гипотетическая) возможность алгоритмического порождения "случайных объектов" в конкретных "универсумах", так сказать, "псевдослучайные генераторы". Мы будем использовать простейшие варианты: "орлянку", выбор случайного натурального числа на отрезке $[1,N]$, выбор случайного ребра в графе, выбор случайной плоскости, проходящей через начало координат и т.д. Практически это рутинные программистские операции, используемые часто рефлекторно. Хотя даже на практическом уровне серьезно обсуждаются вопросы о качестве этих генераторов.

В соответствие с идеологией нашего курса, в идеале, в каждом случае, когда нам нужно породить "случайный объект", мы должны указывать конкретную процедуру порождения, уметь проверять (доказывать), что она действительно порождает нужные объекты, и уметь оценивать ее трудоемкость. Хочу отметить, что эти вопросы достаточно тонкие и, более того, многие из них пока не имеют удовлетворительных ответов.

Вероятностная Машина Тьюринга (ВМТ) представляет из себя обычную МТ, которой в некоторых состояния разрешено совершать переходы в зависимости от бросания монеты. В отличии от недетерминированной МТ легко представить себе практическую реализацию такой конструкции. Более того, как утверждают некоторые апологеты теории вероятностей, иных устройств в природе просто не существует. Будем считать, что используются стандартные монетки для игры в орлянку[55], так что каждое вычисление ВМТ на входе x полностью определено, если считать (по аналогии с определением класса $\mathcal{NP}$), что одновременно с x на вход детерминированной МТ подается (вообще говоря, бесконечное) $\{0,1\}$-слово.

Как определить, что слово или язык принимается ВМТ?

В соответствии с определением ВМТ любое вычисление имеет некоторую вероятность.

Будем говорить, что язык $L\subset\Sigma^*$ принимается ВМТ M в *СЛАБОМ смысле [по стандарту МОНТЕ-КАРЛО]*, если для любого слова $x\in\Sigma^*$ вероятность получения ошибочного ответа на вопрос: ($x\in L$?) не превосходит $\frac{1}{3}$. Иначе говоря, если $x\in L$, то M с вероятностью, не меньшей $\frac{2}{3}$ ПРИНИМАЕТ x; а если $x\notin L$, то M с вероятностью, не меньшей $\frac{2}{3}$ ОТВЕРГАЕТ x.

Будем говорить, что язык $L\subset\Sigma^*$ принимается ВМТ M в *СИЛЬНОМ смысле [по стандарту ЛАС-ВЕГАС]*, если она дает *с вероятностью* 1 правильный ответ для любого слова $x\in\Sigma^*$. Это, в частности, означает, что M не может за конечное число шагов принять какое-нибудь слово $x\notin L$.

Языки, принимаемые ВМТ в СЛАБОМ смысле за *полиномиальное в среднем число шагов*, образуют класс $\mathcal{BPP}$.

Языки, принимаемые ВМТ в СИЛЬНОМ смысле за *полиномиальное в среднем число шагов*, образуют класс $\mathcal{ZPP}$.

Наконец, языки, для которых удается построить ВМТ, которая за полиномиальное в среднем число шагов принимает каждое слово из языка с вероятностью $\ge\frac{1}{2}$ и отвергает любое слово, не входящее в язык, образуют промежуточный класс $\mathcal{RP}$.

По построению, классы $\mathcal{BPP}$ и $\mathcal{ZPP}$ замкнуты относительно дополнения и $\mathcal{BPP}\supseteq\mathcal{RP}\supseteq\mathcal{ZPP}\supseteq\mathcal{P}$. В основном, мы будем изучать $\mathcal{BPP}$. Рекомендую почитать книгу Кузюрина и Фомина (гл. 4–5, §6.2) или книгу "Классические и квантовые вычисления". В последней, в разделах 1.3-1.4 дано определение класса $\mathcal{BPP}$, приведен вероятностный тест простоты Миллера-Рабина, показано, что $\mathcal{BPP}\subset\Sigma_1^p\cap\Pi_1^p$ (т.е. принадежит второму этажу т.н. полиномиальной иерархии). В разделе 12.2 построена вероятностная полиномиальная сводимость (что бы это значило?) вычисления дискретного логарифма (а это, что такое?) к задаче разложения числа на множители (задаче факторизации). Кроме того, сами квантовые вычисления являются аналогом вероятностных вычислений со специально определенным правилом вычисления вероятности. При этом, однако, оказывается, что квантовые компьютеры позволяют решать, например, задачу факторизации за полиномиальное время. Как известно, никто пока не знает, есть ли полиномиальный (детерминированный или вероятностный) классический алгоритм для этой задачи. Кроме того, никто пока не умеет решать на квантовом компьютере какую-нибудь NP-полную задачу за полиномиальное время.

Задача 69. $(0.01+0.01)$ Покажите, что класс $\mathcal{BPP}$ не изменится, если

(i) константу стандарта Монте-Карло $\frac{1}{3}$ заменить на любое число, строго меньшее $\frac{1}{2}$, а

(ii) **полиномиальное в среднем число шагов** заменить на **полиномиальное число шагов**.

[54] Достаточно посмотреть на изменения, внесенных во 2-е издание Кормена.

[55] Монетки у которых, скажем, вероятность выпадения герба является каким-нибудь *невычислимым* числом, в принципе можно использовать, для распознавания невычислимых языков.

Последняя задача позволяет дать определение класса $\mathcal{BPP}$ по аналогии с классом $\mathcal{NP}$.

Предикат L принадлежит классу $\mathcal{BPP}$, если существуют такие полином $q(\cdot)$ и предикат $R(\cdot,\cdot) \in \mathcal{P}$, что

$L(x)=1 \implies$ *доля слов r длины $q(|x|)$, для которых выполнено $R(x,r)$, больше $2/3$;*

$L(x)=0 \implies$ *доля слов r длины $q(|x|)$, для которых выполнено $R(x,r)$, меньше $1/3$.*

Иначе говоря, на вход недетерминированной МТ подается слово-вход x и слово-подсказка r, и x принимается, если и только если при некоторой (не слишком длинной) подсказке принимается пара (x,r). Соответственно, ВМТ читает слово-вход x, а роль слова-подсказки r выполняют результаты бросания монетки в процессе вычисления, причем слово x принадлежит языку, если пары (x,r) принимаются для фиксированной доли C_1 подсказок (бросаний монеты) и отвергается, если число допустимых пар (x,r) меньше некоторой фиксированой доли C_2. По определению, константы C_1 и C_2 должны иметь "зазор" $C_1 - C_2 > \varepsilon$. Если последнее требование опустить (т. е. положить $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$), то вычислительные возможности ВМТ неизмеримо возрастают, а класс распознаваемых на таких ВМТ языков называется $\mathcal{PP}$. В частности, $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{PP}$.

Проверка (полиномиальных) тождеств является одним из наглядных и убедительных примеров нетривиального использования вероятностных алгоритмов. В основе подхода лежит т. н. **Лемма Шварца- Зиппеля**[56].

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$, не равный тождественно нулю полином степени не выше k по каждой переменной[57], **и пусть принимающие целые значения случайные величины $\xi_1,\ldots,\xi_n$ независимо и равномерно распределены на отрезке $[0, N-1]$.**

Тогда $Prob\{f(\xi_1,\ldots,\xi_n)=0\} \le \frac{kn}{N}$.

Это утверждение мы обсудим на лекции, и на эту тему будут задачи как в ближайших контрольных, так и в финальном тесте.

Доказательство леммы *проводится индукцией по числу переменных n. Утверждение верно при $n=1$, поскольку нетривиальный полином степени k имеет не более k корней. При $n>1$ разложим f по переменной x_1: $f = f_0 + f_1 x_1 + \ldots + f_t x_1^t$, где полиномы $f_0,\ldots,f_t$ не зависят от x_1, а f_t не равен нулю тождественно. Тогда по формуле полной вероятности $Prob\{f=0\} = Prob\{f=0 \mid f_t=0\}Prob\{f_t=0\} + Prob\{f=0 \mid f_t\neq 0\}Prob\{f_t\neq 0\} \le Prob\{f_t=0\} + Prob\{f=0 \mid f_t\neq 0\}$. Первый член оценивается по индуктивному предположению, а второй — не больше, чем $\frac{k}{N}$, поскольку на каждом отрезке $[(0,\xi_2,\ldots,\xi_n),(N-1,\xi_2,\ldots,\xi_n)]$ полином $f = f_0 + f_1 x_1 + \ldots + f_t x_1^t$ с ненулевым старшим коэффициентом f_t может иметь не более $t \le k$ корней, так что $Prob\{f=0\} \le \frac{k(n-1)}{N} + \frac{k}{N}$.*

Задача 70. (4×0.01) Проверьте матричное равенство $C = AB$, где A, B, C– $n\times n$ матрицы, имеющие целочисленные элементы, не превышающие по абсолютной величине h, используя рандомизацию.

Пусть x— случайный n-мерный вектор, компоненты которого независимые целые числа, равномерно выбранные из интервала $[0,1,\ldots,N-1]$. Проверка равенства состоит в вычислении $A(Bx) = Cx$: если это равенство справедливо, то вы предполагаете, что исходное равенство верное, иначе вы сигнализируете об ошибке. Заметим, что каждую такую проверку можно выполнить за $O(n^2)$ операций над $O(\log(nh^2))$-разрядными числами, а любой сигнал об ошибке говорит о том, что исходное равенство неверное. С другой стороны, если проверка прошла успешно, то возможно, что исходное равенство неверное, но мы неудачно подобрали тестовый вектор x.

(i) Каким нужно выбрать N, чтобы вероятность ошибки вашей процедуры была меньше заданной вероятности p?

(ii) Тот же вопрос, если разрешается проводить несколько независимых проверок, а минимизировать нужно общую *битовую сложность* вычислений.

(iii) Сравните битовую сложность вероятностных процедур с стандартным детерминированным алгоритмом перемножения матриц для $n = 10000; h = 2^{15}; p = 0.001$

(iv) Для дальнейшей экономии вы решили использовать проверку $(A(Bx)x) = (Cx)x$ или проверку $(A(Bx)y) = (Cx)y$, где n-вектор y выбирается независимо от x и имеет те же характеристики. Как изменится для этих случаев N?

Язык 2-ВЫПОЛНИМОСТЬ состоит из выполнимых КНФ, в которых каждый дизъюнкт содержит не более двух литералов. Вы знаете, что задачу можно решать за линейное время, используя линейный алгоритм выделения сильно связных компонент в орграфах (об этом мы говорили на последней лекции). В этой задаче мы построим быстрый вероятностный алгоритм для проверки выполнимости 2-КНФ. Пусть 2-КНФ имеет n литералов и m дизъюнктов.

Алгоритм случайного поиска для языка 2-КНФ. Сначала всем переменным присваивается значение TRUE. На каждой итерации, пока формула невыполнима, берется произвольный невыполненный дизъюнкт, в нем равновероятно выбирается произвольный литерал и его логическое значение обращается. Этот процесс напоминает случайное блуждание и в принципе может продолжаться бесконечно (например, если взять невыполнимую КНФ). Однако для выполнимой 2-КНФ можно получить полиномиальные оценки среднего числа итераций. Дело в том, что *число отличий* между текущим набором логических значений переменных и их значениями в некотором произвольном (но фиксированном) выполняющем наборе (существующем по предположению) изменяется на каждой итерации с вероятностью $\frac{1}{2}$ на 1. Таким образом, наш алгоритм можно интерпретировать как случайное блуждание на отрезке [0,1,...,n].

Задача 71. $(0.04 + 0.01)$ (i) Покажите, что для выполнимой 2-КНФ среднее число итераций алгоритма (математическое ожидание числа итераций) равно $O(n^2)$.

(ii) Пусть пункт (i) справедлив (а больше ничего о языке 2-КНФ неизвестно). В какой из вероятностных классов, определенных выше, попадает тогда язык 2-КНФ?

Задача о минимальном разрезе в неориентированном графе $G = (V,E)$ заключается в том, чтобы разбить вершины графа на два дизъюнктных подмножества $(S,\bar{S})$, $S \neq V$, $S \neq \varnothing$ так, чтобы минимизировать число ребер с концами в разных долях. Конечно, для ее решения можно применить потоковый алгоритм, но мы рассмотрим простую вероятностную процедуру. При этом основной будет операция стягивания ребра (кратные ребра остаются, а петли удаляются). Граф, полученный стягиванием ребра $(x,y) \in E$, обозначим $G/(x,y)$. Первоначальная идея заключается в следующем: при стягивании ребер величина минимального разреза не убывает (пока в графе остается не менее двух вершин), так что если стянуть все ребра $\{e_1,\ldots,e_p\}$, не входящие в минимальный разрез, то останется пара вершин, соединенная k ребрами, где k — величина минимального разреза в G. Остается понять, как часто реализуется подобная ситуация, если ребра стягиваются случайно.

[56] Смысл леммы в том, что если полином не равен нулю тождественно, то он не может слишком часто обращаться в нуль, например, в точках целочисленной решетки. Это утверждение известно как Schwartz-Zippel Lemma. На самом деле, Шварцу, видимо, принадлежит вероятностная интерпретация, поскольку сам факт давно известен (см., например, главу "Сравнения" в книге Боревича и Шафаревича "Теория чисел"), но ему не придавали вероятностной интерпретации.

[57] Лемма остается верной, если считать, что k — это суммарная степень по совокупности переменных.

Задача 72. $(2 \times 0.02 + 0.01)$ (i) Покажите, что вероятность того, что случайно выбранное ребро в графе входит в минимальный разрез не превышает $\frac{2}{|V|}$.

Из предыдущей задачи вытекает следующий вероятностный алгоритм определения минимального разреза:

MINCUT $[G(V,E), |V| = n]$

$G_0 \leftarrow G$; $i \leftarrow 0$;

while $|V(G_i)| > 2$ **do**

В G_i выбираем случайное ребро e_i (с равномерным распределением на ребрах G_i).

$G_{i+1} \leftarrow G_{/e_i}$; $i \leftarrow i+1$;

end while

Комментарий. На выходе из цикла получаем (мульти)граф $\tilde{G}$, имеющий две вершины, соединенные ребрами, иногда отвечающими разрезу в исходном графе.

return Разрез в исходном графе G, отвечающий разрезу в $\tilde{G}$.

Времы работы алгоритма $O(n^2)$.

(ii) Покажите что MINCUT выдает минимальный разрез с вероятностью $\geq \frac{2}{n(n-1)}$.

(iii) Покажите, что если независимо повторить процедуру MINCUT n^2 раз, то минимальный разрез будет найден с вероятностью > 0.85.

В следующей задаче мы покажем, что если привлечь дополнительные соображения, то можно понизить трудоемкость до $O(n^2 \log^{O(1)} n)$. При этом алгоритм столь же прост и допускает параллелизацию.

Описанная выше процедура поиска минимального разреза последовательно выбирает случайные ребра и стягивает их концы до тех пор, пока в графе не останутся две вершины, соединенные (кратными) ребрами. Если при выборе случайных ребер мы ни разу не выбирали ребра разреза, то мы получаем ответ. Выше мы показали, что вероятность на i-м шаге выбрать ребро, входящее в разрез, равна $p_i = \frac{2}{n-i}$, отсюда вероятность того, что за i шагов не будет выбрано ни одно ребро, входящее в минимальный разрез (мы будем говорить, что выбранные *ребра не задевают разрез*), равна $P_i = (1-p_1)(1-p_2)\dots(1-p_i)$. Мы хотим ускорить алгоритм. Заметим, что чем больше ребер мы стягиваем, тем больше вероятность, что следующее выбранное ребро заденет минимальный разрез. Поэтому новая идея, которую мы хотим исследовать, заключается в том, чтобы стягивать ребра до какого-то порога, пока вероятность попадания в разрез еще достаточно мала, а дальше использовать рекурсию. Из формулы для P_i видно, что если стянуть $n/2$ случайных ребер, то они с вероятностью $\geq \frac{1}{4}$ не заденут минимальный разрез.

Блок-схема нового алгоритма приведена ниже. Процедура использует подпрограмму СТЯГИВАНИЕ (G,k), которая стягивает ребра до тех пор пока число вершин не уменьшится ниже порога k (при стягивании произвольного ребра число вершин уменьшается на единицу).

СТЯГИВАНИЕ (G,k)
for $i := n$ **downto** k
В G выбираем случайное ребро e
(с равномерным распределением
на ребрах).
$G \leftarrow G/e$
endfor
return G

МИН-РАЗРЕЗ (G)
if в G больше восьми вершин **then**
Повторить 4 раза процедуру
$X_1 \leftarrow$ МИН-РАЗРЕЗ [СТЯГИВАНИЕ $(G, \frac{n}{2})$];
$X_2 \leftarrow$ МИН-РАЗРЕЗ [СТЯГИВАНИЕ $(G, \frac{n}{2})$];
$X_3 \leftarrow$ МИН-РАЗРЕЗ [СТЯГИВАНИЕ $(G, \frac{n}{2})$];
$X_4 \leftarrow$ МИН-РАЗРЕЗ [СТЯГИВАНИЕ $(G, \frac{n}{2})$];
return $\min\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$
else находим минимальный разрез вручную.

Задача Д–23. $(0.01 + 0.01 + 0.04 + 0.01)$

(i) Запишите рекуррентную оценку сложности $T(n)$ вычисления функции МИН-РАЗРЕЗ (G) для графа с $|V| = n$ вершинами.

(ii) Найдите Θ-асимптотику $T(n)$ (для этого нужно сначала оценить трудоемкость процедуры СТЯГИВАНИЕ (G,k)).

Оценим теперь с какой вероятностью $\mathbb{P}(n)$ алгоритм МИН-РАЗРЕЗ(G) выдает минимальный разрез для графа G с n вершинами. Вероятность успеха равна вероятности того, что хотя бы один рекурсивный вызов дал корректный ответ. Таким образом, получаем: $\mathbb{P}(n) = 1 - \left(1 - \frac{1}{4}\mathbb{P}(\frac{n}{2})\right)^4$, откуда следует, что $\mathbb{P}(n) \geq \mathbb{P}(\frac{n}{2}) - \frac{3}{8}\mathbb{P}(\frac{n}{2})^2$. Считая, что n является степенью двойки, обозначим $p_k = \mathbb{P}(2^k)$. По определению, p_k равно вероятности успеха, если потребовалось k рекурсивных вызовов процедуры МИН-РАЗРЕЗ. В частности, $p_0 = 1$.

Получаем рекурсию $p_{k+1} = 1 - (1 - \frac{1}{4}p_k)^4$. Откуда, если раскрыть скобки, следует: $p_{k+1} \geq p_k - \frac{3}{8}(\mathcal{P}_k)^2$.

(iii) Приведите как можно более точную оценку снизу рекурсии: $p_0 = 1; p_{k+1} = p_k - \frac{3}{8}(p_k)^2$ вида $p_k = \Omega(f(k))$.

Подсказка. Предположите, что $p_{k+1} - p_k \approx \frac{dp}{dk}$, и оцените порядок роста функции $p(k)$, а потом обоснуйте вашу гипотезу.

(iv) Получите оценку числа итераций модифицированно вероятностного алгоритма поиска минимального разреза, для получения заданной точности ε и приведите оценку общего числа операций.

Задача Д–24. $(0.01 + 0.03 + 0.01)$ **[Вероятностный алгоритм для языка ВЫПОЛНИМОСТЬ и дерандомизация].** Предположим, КНФ содержит m дизъюнктов и в каждый дизъюнкт входит ровно k литералов. Пусть X — случайная величина, равная числу выполненных дизъюнктов, если независимо и равновероятно приписать каждому литералу значения 0 или 1. Поскольку каждый дизъюнкт ложен лишь при одном значении литералов и матожидания суммируются, то математическое ожидание числа выполненных дизъюнктов равно: $E(X) = m(1 - 2^{-k})$.

Это значит, что существует логический набор, на котором выполнено не менее $E(X)$ дизъюнктов. Далее, как и в случае с задачами из $\mathcal{NP}$, возникает та же проблема. Мы знаем, что такой набор существует, но не знаем, как его найти, не используя полный перебор. В нашем случае, для нахождения искомого набора можно, во-первых, построить эффективный вероятностный алгоритм. И более того, можно провести дерандомизацию, т. е. конвертировать вероятностную процедуру в детерминированную (не сильно увеличивая сложность). Последнее возможно далеко не всегда, и одним из центральных вопросов теории сложности является соотношение между классами $\mathcal{P}$ и $\mathcal{BPP}$, т. е. верно ли, что всякую процедуру из $\mathcal{BPP}$ можно дерандомизировать?

Алгоритм нахождения набора заключается в следующем. Оценим вероятность события $p = Prob[X \geq m(1-2^{-k})]$ (т. е. что в КНФ *выполнено не менее* $m(1-2^{-k})$ *дизъюнктов*). Для этого распишем математическое ожидание: $E(X) = \sum_{i=1}^{m} i * Prob[X = i] \leq [m(1-2^{-k}) - 1](1-p) + mp$. Отсюда $p \geq (m2^{-k} + 1)^{-1}$.

Такая оценка позволяет построить следующий вероятностный алгоритм для определения набора, выполняющего не менее $m(1 - 2^{-k})$ дизъюнктов: достаточно независимо повторить процедуру $\geq m2^{-k} + 1$ раз и тогда с вероятностью $> \frac{1}{2}$ одна из попыток даст искомый набор.

(i) Будет ли предложенный алгоритм 1) Лас-Вегас алгоритмом; 2) Монте-Карло алгоритмом; 3) ни тем, ни другим?

Поскольку порождение случайного набора требует $O(n)$ операций, а проверка числа выполненных дизъюнктов требует $O(mk)$ операций, то одна итерация алгоритма занимает $O(m2^{-k}(mk+n))$

Теперь попробуем дерандомизировать процедуру.

Свяжем с каждым литералом x_i случайную величину Y_i, принимающую равновероятно значения 0 или 1, и будем считать $\{Y_i\}$, $i = 1, \dots, n$ независимыми. Значение величины Y_i будем обозначать ма-

ленькой буквой y_i. Мы используем т.н. метод *условных вероятностей*, который заключается в последовательном приписывании логических значений литералам так, чтобы на каждом шаге выполнялось неравенство: $E(X|y_1,\ldots,y_j) \leq E(X|y_1,\ldots,y_{j+1})$. Осуществить такой подход удается не всегда. В нашем случае ключевым является тождество[58]: $E(X|y_1,\ldots,y_j) = \frac{1}{2}[E(X|y_1,\ldots,y_j,Y_{j+1} = 1)+E(X|y_1,\ldots,y_j,Y_{j+1}=0)]$. Таким образом, нужно научиться *детерминированно* приписывать литералу x_{j+1} значение, имеющее *большее условное математическое ожидание*. Для этого нужно разбить множество дизъюнктов на 4 непересекающиеся подмножества [1) уже выполненных; 2) не зависящих от x_{j+1}; 3) выполняющихся при $x_{j+1}=1$; 4) выполняющихся при $x_{j+1}=0$|, вычислить условные мат. ожидания и присвоить литералу x_{j+1} значение, отвечающее большему мат. ожиданию.

(*ii*) Закончите вычисления, т. е. явно укажите, какие истинностные значения следует присваивать литералам. При вычислении условных вероятностей не забывайте о вкладе переменных, значения которым **еще не присвоены**!

(*iii*) Проведите вычисления для 2-КНФ[59] $(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_6) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_4) \wedge (\vee\bar{x}_5 \vee x_7) \wedge (\bar{x}_7 \vee x_8\vee) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_7)$

В заключение отметим, что по ходу рассуждений мы показали следующее полезное утверждение (которое полезно доказать каким-то иным способом): *всякая k-КНФ, имеющая меньше 2^k дизъюнктов, выполнима.*

Кроме того, *для случая 3-КНФ, каждый дизъюнкт которой содержит ровно 3 литерала, мы построили $\frac{7}{8}$-приближенный (детерминированный и вероятностный) полиномиальный алгоритмы для NP-трудной задачи MAX-3-SAT, в которой требуется выполнить максимальное число дизъюнктов*[60]. И в этом бы не было ничего удивительного, если бы J.Håstad не показал (это довольно тяжело), что при $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ **никакая** эффективная процедура для задачи MAX-ВЫПОЛНИМОСТЬ не может давать большую точность.

[58] На самом деле, достаточно потребовать *квазивогнутости*: $E(X|\ldots) \leq \max[E(X|\ldots,Y_{j+1}=1), E(X|\ldots,Y_{j+1}=0)]$.

[59] Контрольный вопрос: является ли указанная процедура полиномиальным алгоритмом для 2-КНФ?

[60] Это, значит, что алгоритм находит набор, на котором выполняется не менее $\frac{7}{8}$ от максимально возможного числа дизъюнктов, которые можно одновременно выполнить.