Фамилия И.О., группа: ______________________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Σ	оценка

семинарист: ______________________

Необоснованные ответы не оцениваются! Если в задаче требуется построение алгоритма, то нужно построить оптимальный алгоритм (за неэффективность снижается оценка), доказать его корректность и оценить время работы.

1 (2). На вход подаётся число n и координаты точек на плоскости (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Необходимо найти максимальную площадь треугольника, вершинами которого являются некоторые точки из списка, причём одна из сторон лежит на оси Oy.

2 (3). Имеется набор из n блоков высоты 1 и ширины $w_i \in [1, 2, .., 100]$, задающиеся входным массивом $W = \{w_i\}$. Требуется построить из них башню максимальной высоты. Каждый этаж башни содержит ровно один блок. Причем, чтобы башня была устойчивой, ширина ее $k-$го этажа должна быть как минимум в полтора раза больше чем $(k+1)-$го. Постройте алгоритм, решающий данную задачу.

3 (3). Известно, что $f(n) = O\left(\dfrac{g(n)}{f(n)}\right)$, где $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$. Следует ли отсюда, что $f(n) = O((g(n))^{1-\varepsilon})$ для некоторого $\varepsilon > 0$?

4 (2+2+2). Найдите лучшие верхние и нижние оценки на функции, считая, что при малых n, $T(n) = O(1)$:

а) $T(n) = 4T(\frac{n}{4}) + \frac{n^2}{n+\log^2 n}$; **б)** $f(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{n}{i}}$; **в)** $T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + \frac{n^2}{\log_2 n}$.

5 (2)**.** Найдите обратный остаток к 127 по модулю 353, используя расширенный алгоритм Евклида.

6 (3)**.** На плоскости даны n точек с координатами $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$, $(x_i, y_i) \in \mathbb{Z}^2$. Привести алгоритм для нахождения пути, проходящего через n точек без самопересечения, считая, что точки соединяются отрезком прямой.

7 (3)**.** Приведите как можно более быстрый алгоритм, который находит в куче (Heap) с максимальным свойством второй максимум ($(n-1)$-ю порядковую статистику).

8 (4)**.** Докажите, что чтобы найти все порядковые статистики $a_{(3)}, a_{(6)}, ..., a_{(3i)}$ массива $a[1, .., n]$ необходимо $\Omega(n \log n)$ сравнений.

9 (5). На шоссе из города A в город B расположено n отелей. Вам известно, что они находятся на расстояниях $0 < x_1, x_2, \dots, x_n$ от города A. Вы хотите построить на шоссе бензоколонку таким образом, чтобы суммарное расстояние от нее до всех отелей было минимальным. Придумайте оптимальный алгоритм, который находит (в терминах расстояния до города A) оптимальное местоположение для бензоколонки. Докажите корректность и оптимальность алгоритма.

10 (6). Имеется алгоритм, время работы которого оценивается следующей рекуррентой:

$$T(n) = \begin{cases} C, & n < A,\ \ A, C - \text{некоторые константы} \\ 3 \cdot T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n, & n - \text{полный квадрат} \\ 3 \cdot T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n^2, & \text{иначе} \end{cases}$$

Дать наилучшие нижнюю и верхнюю оценки.

11 (7). На плоскости даны n точек с координатами $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$, $(x_i, y_i) \in \mathbb{Z}^2$, не лежащие на одной прямой. Привести алгоритм для нахождения замкнутого пути (цикла), проходящего через n точек без самопересечения, считая, что точки соединяются отрезком прямой.

Фамилия И.О., группа: ____________________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Σ	оценка

семинарист: ____________________

Необоснованные ответы не оцениваются! Если в задаче требуется построение алгоритма, то нужно построить оптимальный алгоритм (за неэффективность снижается оценка), доказать его корректность и оценить время работы.

1 (2). На вход подаётся число n и координаты точек на плоскости (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Необходимо найти квадрат со сторонами, параллельными осям координат, минимальной площади, который содержит все перечисленные точки (если точка лежит на границе, то она входит в квадрат).

2 (3). Имеется набор из n блоков высоты 1 и ширины $w_i \in [1, 2, .., 100]$, задающиеся входным массивом $W = \{w_i\}$. Требуется построить из них башню максимальной высоты. Каждый этаж башни содержит ровно один блок. Причем, чтобы башня была устойчивой, ширина ее $k-$го этажа должна быть как минимум в полтора раза больше чем $(k+1)-$го. Постройте алгоритм, решающий данную задачу.

3 (3). Известно, что $f(n) = \Omega\left(\frac{g(n)}{f(n)}\right)$, где $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$. Следует ли отсюда, что $g(n) = O((f(n))^{1-\varepsilon})$ для некоторого $\varepsilon > 0$?

4 (2+2+2). Найдите лучшие верхние и нижние оценки на функции, считая, что при малых n, $T(n) = O(1)$:

а) $T(n) = 3T(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + \frac{n^2 + \log^2 n}{n}$; **б)** $f(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt[3]{\frac{n}{i}}$; **в)** $T(n) = 6T(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor) + n^2 \cdot \log_2 n$.

5 (2). Найдите обратный остаток к 129 по модулю 349, используя расширенный алгоритм Евклида.

6 (3). На плоскости даны n точек с координатами $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$, $(x_i, y_i) \in \mathbb{Z}^2$. Привести алгоритм для нахождения пути, проходящего через n точек без самопересечения, считая, что точки соединяются отрезком прямой.

7 (3). Приведите как можно более быстрый алгоритм, который находит в куче (Heap) с минимальным свойством второй минимум (вторую порядковую статистику).

8 (4). Докажите, что чтобы найти все порядковые статистики $a_{(4)}, a_{(8)}, ..., a_{(4i)}$ массива $a[1, .., n]$ необходимо $\Omega(n \log n)$ сравнений.

9 (5). На шоссе из города A в город B расположено n отелей. Вам известно, что они находятся на расстояниях $0 < x_1, x_2, \ldots, x_n$ от города A. Вы хотите построить на шоссе бензоколонку таким образом, чтобы суммарное расстояние от нее до всех отелей было минимальным. Придумайте оптимальный алгоритм, который находит (в терминах расстояния до города A) оптимальное местоположение для бензоколонки. Докажите корректность и оптимальность алгоритма.

10 (6). Имеется алгоритм, время работы которого оценивается следующей рекуррентой:

$$T(n) = \begin{cases} C, & n < A,\ A, C - \text{некоторые константы} \\ 4 \cdot T([\frac{n}{3}]) + n, & n - \text{полный куб} \\ 4 \cdot T([\frac{n}{3}]) + n^2, & \text{иначе} \end{cases}$$

Дать наилучшие нижнюю и верхнюю оценки.

11 (7). На плоскости даны n точек с координатами $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$, $(x_i, y_i) \in \mathbb{Z}^2$, не лежащие на одной прямой. Привести алгоритм для нахождения замкнутого пути (цикла), проходящего через n точек без самопересечения, считая, что точки соединяются отрезком прямой.