

Фамилия И.О., группа: _____

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Σ

семинарист: _____

Необоснованные ответы не оцениваются! Если в задаче требуется построение алгоритма, то нужно построить оптимальный алгоритм (**за неэффективность снижается оценка!**), доказать его корректность и оценить время работы. Задачи расположены в порядке тем курса.

1 (3). На вход задачи подаётся последовательность целых чисел (диапазон integer) x_1, \dots, x_n , которая оканчивается нулём (0 встречается ровно один раз). Постройте онлайн алгоритм, который находит максимальное произведение $x_i \times x_j$, такое, что $|i - j| < 8$, и использует для этого $O(1)$ -памяти.

2 (3). Определим $f(n)$ как количество выводов «Hello, World!» следующей функцией (на входе n). Оцените асимптотику роста $f(n)$.

```

1 Function HelloWorld( $n$ ) :
2   if  $n < 2018$  then
3     for  $i = 1$  to  $n$  do
4       | print("Hello, World!");
5     end
6   else
7     HelloWorld( $\lfloor n/3 \rfloor$ );
8     print("Hello, World!");
9     HelloWorld( $\lfloor n/3 \rfloor$ );
10    for  $i = 1$  to 2018 do
11      | print("Hello, World!");
12    end
13  end
14 end
    
```

3 (2+3). Найдите лучшие верхние и нижние оценки на функции, считая, что при малых n , $T(n) = \Theta(1)$:

а) $T(n) = 27T(\lfloor n/3 \rfloor) + \frac{n^5}{n^2 + \log n}$; **б)** $T(n) = T(\frac{n}{8}) + T(\frac{19n}{24}) + 2n$.

4 (4). A — строго возрастающий массив длины n (n неизвестно). Функция $f(x)$ возвращает $A[x] < \infty$ при $1 \leq x \leq n$ и ∞ при $x > n$. Постройте алгоритм, который проверяет, встречается ли y (вход задачи) среди значений f за $O(\log n)$, вызывая функцию f как чёрный ящик.

5 (2+5). На вход подается число n и n пар целых чисел $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$. Эти точки являются парой “аргумент-значение” для некоторой функции $y = f(x)$, $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Точки подаются на вход в произвольном порядке. Постройте алгоритм, определяющий может ли f быть **а)** строго монотонной; **б)** выпуклой?

6 (5). Дано полное тернарное дерево (корневое дерево, у каждой внутренней вершины три ребёнка), все листья помечены 0 или 1, а каждая внутренняя вершина имеет метку, которую имеет большинство её детей.

На вход подается массив меток листьев, нужно определить метку корня. Доказать, что в худшем случае, чтоб определить метку корня, требуется узнать метки всех листьев дерева

7 (3). Прийдя на безумное чаепитие, Алиса обнаружила, что пудинги там недостаточно сладкие. Алиса хочет, чтобы сладость каждого пудинга была не меньше K . Для этих целей она смешивает пудинги по следующему правилу. Берёт два пудинга p_1 и p_2 с наименьшей сладостью $s_1 \leq s_2$ и смешивает их. В результате получается пудинг со сладостью $s = s_1 + 2s_2$, который занимает место пудинга p_1 (пудинг p_2 утилизирован). Постройте алгоритм, который получив на вход числа n, K, s_1, \dots, s_n , где n — число пудингов, возвращает последовательность пар номеров пудингов, которые необходимо смешать Алисе по её правилам для достижения сладости не меньше K каждым из пудингов, или сообщает, что это сделать невозможно.

8 (5). В графе G был проведён поиск в глубину. Время открытия и закрытия вершин сохранено в массивах d и f , а описание самого графа забыто. Приведите алгоритм, который находит корень дерева в лесе поиска в глубину, в котором лежит вершина v .

9 (5). В стране произошло стихийное бедствие, в результате которого были разрушены многие дороги. Правительству нужно восстановить сообщение между городами (чтобы из каждого города можно было добраться до каждого); для этого нужно восстановить некоторые дороги (все они двусторонние) затратив на это минимум средств — восстановление i -ой дороги стоит c_i . Вход задачи: граф дорог страны; у каждого ребра-дороги указана цена восстановления; цена 0, если дорога не была разрушена. Постройте алгоритм, который выводит список дорог, которые нужно восстановить для достижения цели, минимизируя затраты.

10 (2+5). Необходимо найти в ориентированном графе $G(V, E)$ с весами на рёбрах (быть может отрицательными, но циклов отрицательного веса в G нет) такие вершины u и v , что v достижима из u и стоимость $d[u, v]$ самого дешёвого пути из u в v максимальна. Постройте алгоритм, решающий задачу, при условии, что граф G **а)** произвольный; **б)** ациклический и алгоритм работает за $O(|V| + |E|)$; в случае худшей асимптотики, задача оценивается в 2 очка.

11 (3). Разработчик ПО для навигатора столкнулся со следующей проблемой. Ему предоставили граф автодорог Москвы, вершины которого — перекрёстки (или развязки), а рёбра — дороги, но некоторые повороты на перекрёстках запрещены: для каждой вершины указаны пары смежных с ней рёбер, которые описывают запрещённый поворот. Постройте алгоритм, который находит кратчайшее расстояние между двумя вершинами этого графа. Граф взвешенный с положительными весами на рёбрах.

12 (2+7). Рассмотрим следующую постановку дискретной задачи про рюкзак. На вход подаются числа W и n и n троек (w_i, c_i, k_i) , где w_i и c_i — вес и стоимость i -го предмета соответственно, а k_i количество таких предметов в магазине (все числа положительные и целые); у двух разных троек пары (w_i, c_i) не совпадают. Необходимо собрать рюкзак максимальной стоимости, веса не более W .

1. Постройте алгоритм, решающий эту задачу за $O(WK)$, где $K = \sum_i k_i$.

2. Постройте алгоритм, решающий эту задачу за $O(Wn)$.

13 (4+1). Будем обозначать большими буквами символы, а малыми — строки. Правило переписывания $A \rightarrow y$ означает, что в строке $X_1X_2 \dots X_n$ любой символ $X_i = A$ можно заменить на строку y . Необходимо проверить, можно ли путём последовательных применений правил переписываний (в некотором порядке) получить из символа S строку z , в случае если каждое правило имеет вид $A \rightarrow BC$ или $A \rightarrow B$. Вход задачи: символ S , строка z , число n и последовательность из n правил переписываний указанного вида. Постройте алгоритм, решающий задачу. Является ли он полиномиальным?

Фамилия И.О., группа: _____

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Σ

семинарист: _____

Необоснованные ответы не оцениваются! Если в задаче требуется построение алгоритма, то нужно построить оптимальный алгоритм (**за неэффективность снижается оценка!**), доказать его корректность и оценить время работы. Задачи расположены в порядке тем курса.

1 (3). На вход задачи подаётся последовательность целых чисел (диапазон на integer) x_1, \dots, x_n , которая оканчивается нулём (0 встречается ровно один раз). Постройте онлайн алгоритм, который находит минимальное произведение $x_i \times x_j$, такое, что $|i - j| < 7$, и использует для этого $O(1)$ -памяти.

2 (3). Определим $f(n)$ как количество выводов «Hello, World!» следующей функцией (на входе n). Оцените асимптотику роста $f(n)$.

```

1 Function HelloWorld( $n$ ) :
2   if  $n > 2018$  then
3     HelloWorld( $\lfloor n/4 \rfloor$ );
4     print("Hello, World!");
5     HelloWorld( $\lfloor n/4 \rfloor$ );
6     for  $i = 1$  to 2018 do
7       | print("Hello, World!");
8     end
9     HelloWorld( $\lfloor n/4 \rfloor$ );
10  else
11    | for  $i = 1$  to  $n$  do
12      | print("Hello, World!");
13    | end
14  end
15 end

```

3 (2+3). Найдите лучшие верхние и нижние оценки на функции, считая, что при малых n , $T(n) = \Theta(1)$:

а) $T(n) = 256T(\lfloor n/4 \rfloor) + \frac{n^7}{n^3 + \log n}$; **б)** $T(n) = T(\frac{5n}{9}) + T(\frac{n}{6}) + 3n$.

4 (4). A — строго возрастающий массив длины n (n неизвестно). Функция $f(x)$ возвращает $A[x] < \infty$ при $1 \leq x \leq n$ и ∞ при $x > n$. Постройте алгоритм, который проверяет, встречается ли y (вход задачи) среди значений f за $O(\log n)$, вызывая функцию f как чёрный ящик.

5 (2+5). На вход подается число n и n пар целых чисел $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$. Эти точки являются парой “аргумент-значение” для некоторой функции $y = f(x)$, $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Точки подаются на вход в произвольном порядке. Постройте алгоритм, определяющий может ли f быть **а)** строго монотонной; **б)** выпуклой?

6 (5). Дано полное тернарное дерево (корневое дерево, у каждой внутренней вершины три ребёнка), все листья помечены 0 или 1, а каждая внутренняя вершина имеет метку, которую имеет большинство её детей.

На вход подается массив меток листьев, нужно определить метку корня. Доказать, что в худшем случае, чтоб определить метку корня, требуется узнать метки всех листьев дерева

7 (3). Прийдя на безумное чаепитие, Алиса обнаружила, что пудинги там недостаточно сладкие. Алиса хочет, чтобы сладость каждого пудинга была не меньше K . Для этих целей она смешивает пудинги по следующему правилу. Берёт два пудинга p_1 и p_2 с наименьшей сладостью $s_1 \leq s_2$ и смешивает их. В результате получается пудинг со сладостью $s = s_1 + 2s_2$, который занимает место пудинга p_1 (пудинг p_2 утилизирован). Постройте алгоритм, который получив на вход числа n, K, s_1, \dots, s_n , где n — число пудингов, возвращает последовательность пар номеров пудингов, которые необходимо смешать Алисе по её правилам для достижения сладости не меньше K каждым из пудингов, или сообщает, что это сделать невозможно.

8 (5). В графе G был проведён поиск в глубину. Время открытия и закрытия вершин сохранено в массивах d и f , а описание самого графа забыто. Приведите алгоритм, который находит корень дерева в лесе поиска в глубину, в котором лежит вершина v .

9 (5). В стране произошло стихийное бедствие, в результате которого были разрушены многие дороги. Правительству нужно восстановить сообщение между городами (чтобы из каждого города можно было добраться до каждого); для этого нужно восстановить некоторые дороги (все они двусторонние) затратив на это минимум средств — восстановление i -ой дороги стоит c_i . Вход задачи: граф дорог страны; у каждого ребра-дороги указана цена восстановления; цена 0, если дорога не была разрушена. Постройте алгоритм, который выводит список дорог, которые нужно восстановить для достижения цели, минимизируя затраты.

10 (2+5). Необходимо найти в ориентированном графе $G(V, E)$ с весами на рёбрах (быть может отрицательными, но циклов отрицательного веса в G нет) такие вершины u и v , что v достижима из u и стоимость $d[u, v]$ самого дешёвого пути из u в v максимальна. Постройте алгоритм, решающий задачу, при условии, что граф G **а)** произвольный; **б)** ациклический и алгоритм работает за $O(|V| + |E|)$; в случае худшей асимптотики, задача оценивается в 2 очка.

11 (3). Разработчик ПО для навигатора столкнулся со следующей проблемой. Ему предоставили граф автодорог Москвы, вершины которого — перекрёстки (или развязки), а рёбра — дороги, но некоторые повороты на перекрёстках запрещены: для каждой вершины указаны пары смежных с ней рёбер, которые описывают запрещённый поворот. Постройте алгоритм, который находит кратчайшее расстояние между двумя вершинами этого графа. Граф взвешенный с положительными весами на рёбрах.

12 (2+7). Рассмотрим следующую постановку дискретной задачи про рюкзак. На вход подаются числа W и n и n троек (w_i, c_i, k_i) , где w_i и c_i — вес и стоимость i -го предмета соответственно, а k_i количество таких предметов в магазине (все числа положительные и целые); у двух разных троек пары (w_i, c_i) не совпадают. Необходимо собрать рюкзак максимальной стоимости, веса не более W .

1. Постройте алгоритм, решающий эту задачу за $O(WK)$, где $K = \sum_i k_i$.

2. Постройте алгоритм, решающий эту задачу за $O(Wn)$.

13 (4+1). Будем обозначать большими буквами символы, а малыми — строки. Правило переписывания $A \rightarrow y$ означает, что в строке $X_1X_2 \dots X_n$ любой символ $X_i = A$ можно заменить на строку y . Необходимо проверить, можно ли путём последовательных применений правил переписываний (в некотором порядке) получить из символа S строку z , в случае если каждое правило имеет вид $A \rightarrow BC$ или $A \rightarrow B$. Вход задачи: символ S , строка z , число n и последовательность из n правил переписываний указанного вида. Постройте алгоритм, решающий задачу. Является ли он полиномиальным?