Домашнее задание

1. Вероятностное пространство: перестановки чисел от 1 до 24. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «наибольшее среди первых 12 чисел в перестановке больше наибольшего среди последних 12 чисел».

2. Какова вероятность того, что случайно взятое число от 1 до 100 делится на 2, при условии, что оно делится на 3?

3. В розыгрыше лото случайно выбираются 5 чисел из множества $\{1, 2 \ldots, 36\}$. Независимы ли события «среди выбранных чисел есть 2» и «среди выбранных чисел есть 3»?

4. Случайно выбирается всюду определенная функция $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Независимы ли события «f инъективна» и «$f(1) = 1$»?

5. Жюри из трех человек нужно принять одно из двух возможных решений, одно из которых правильное. Два члена жюри независимо друг от друга принимают правильное решение с вероятностью p, а третий случайно выбирает одно из двух возможных решений с равными вероятностями. Окончательное решение жюри выносится большинством голосов. Какова вероятность, что жюри примет правильное решение? (Сравните ее с вероятностью p правильного решения, принимаемого одним добросовестным членом жюри.)

6. Король предлагает узнику разложить десять белых и десять чёрных шаров по двум одинаковым коробкам (надо использовать все шары; в каждой коробке должен быть хотя бы один шар). После этого сначала король выбирает случайно одну из коробок, каждую с вероятностью $1/2$, а затем из выбранной коробки выбирает случайный шар, все с равными вероятностями. Если шар чёрный, то узника казнят, если белый — отпускают. Как нужно разложить шары, чтобы вероятность выжить была максимальной?

7. Двое игроков играют матч из 20 партий; выигрывает тот, кто первым наберёт 10 очков (за победу даётся одно очко, за проигрыш ноль, ничьих не бывает). Считая все варианты (любые комбинации из двадцати выигрышей и проигрышей) равновероятными, найдите вероятность того, что первый игрок выиграет матч, если после 15 игр счёт был $8 : 7$ в его пользу.

8. Двое играют в бой яиц. Перед ними стоит корзина с яйцами. Они наугад берут по яйцу и ударяют их носами. Разбитое яйцо выбрасывается и побеждённый берёт новое, а победитель раунда сохраняет своё яйцо для следующего раунда (предполагается, что победившее яйцо сохранило свою прочность и что исход каждого раунда зависит только от относительного качества яиц). Какова вероятность победы в $(n+1)$-м раунде после победы во всех предыдущих?

9. Вероятностное пространство: двоичные слова длины 21. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «на первых 10 позициях стоит меньше единиц, чем на последних 11».