Домашнее задание

1. Дан неориентированный граф $G = (V, E)$, веса рёбер которого не обязательно различны. Для каждого из утверждений ниже приведите доказательство, если оно истинно, или постройте контрпример, если оно ложно:

а) Если к каждому ребру графа прибавить вес w, то каждое минимальное остовное дерево G перейдёт в минимальное остовное дерево модифицированного графа.

б) Если самое лёгкое ребро графа G уникально, то оно входит в любое минимальное остовное дерево.

в) Если ребро e входит в некоторое минимальное остовное дерево, то оно является самым лёгким ребром из пересекающих некоторый разрез.

г) Кратчайший путь между двумя вершинами является частью некоторого минимального остовного дерева.

Определение. Граф, который получается из графа G удалением некоторых вершин и рёбер, называют *(рёберным) подграфом* графа G. В случае, если при изготовлении подграфа, рёбра удалялись только вместе с удалением вершин, подграф называют *индуцированным.*

2. Пусть T — минимальное остовное дерево графа G, а H — связный подграф G. Покажите, что рёбра, входящие как в T, так и в H, входят в некоторое минимальное остовное дерево графа H.

3. Рассмотрим алгоритм Union-Find без улучшения со сжатием путей[8]. Приведите последовательность из m операций Union и Find над множеством из n элементов, которая потребует времени $\Omega(m \log n)$.

4. На вход задачи подаётся неориентированный взвешенный граф $G(V, E)$ и подмножество вершин $U \subseteq V$. Необходимо построить остовное дерево, минимальное (по весу) среди деревьев, в которых все вершины U являются листьями (но могут быть и другие листья) или обнаружить, что таких остовных деревьев нет. Постройте алгоритм, который решает задачу за $O(|E| \log |V|)$. Обратите внимание, что искомое дерево может не быть минимальным остовным деревом.

[8] При вызове Find(x) все предки x вместе с x становятся детьми корня.