Графы I. Поиск в глубину

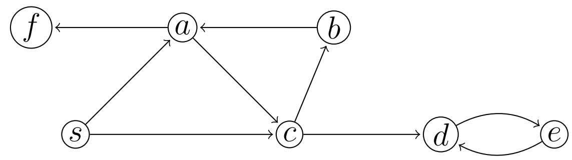

Рис. 1: Граф H.

1. 1. Опишите компоненты сильной связности графа H.

2. проведите поиск в глубину начиная с вершины **а)** с вершины b; **б)** с вершины e.

3. Используя время открытия и закрытия, найденные поиском в глубину, найдите алгоритмически компоненты сильной связности. Постройте конденсат H' графа H.

4. Проведите топологическую сортировку графа H'.

2. Докажите, что поиск в глубину работает за время $O(|V| + |E|)$.

3. В графе G был проведён поиск в глубину. Время открытия и закрытия вершин сохранено в массивах d и f. Постройте алгоритм, который используя только данные из массивов d и f (и описание графа) проверяет, является ли ребро e графа G **а)** обратным ребром; **б)** ребром дерева.

4. Модифицируйте поиск в глубину так, чтобы по результату исполнения алгоритма следующие условия можно было проверить за $O(1)$ (постройте алгоритмы проверки этих условий):

а) ребро e является ребром дерева;

б) ребро e является прямым ребром.

5. Постройте алгоритм, который проверяет, является ли граф двудольным.

6. Постройте алгоритм, который находит в графе Эйлеров цикл за $O(|V| + |E|)$.

7. Постройте алгоритм, который находит кратчайшие расстояния от вершины u до всех достижимых из нее вершин взвешенного ориентированного ациклического графа (DAG) и оцените его время работы. На вход задачи подаётся описание DAG G и список ребер, каждое ребро задано тройкой целых чисел (i, j, w), если в G есть ребро из вершины i в вершину j веса w. Длина пути из вершины u в вершину v во взвешенном графе — сумма весов на пути из u в v, если этот путь существует.

Определение. Ориентированный граф называют *турниром*, если между каждой парой его вершин есть ровно одно ребро. Также такие графы называют *полными* ориентированными графами.

8. Турнир с $|V|$ вершинами задан в виде матрицы смежности ($|V|^2$ памяти), предложите алгоритм, который находит общий сток за $O(|V|)$ (или говорит, что его нет).

Общим стоком называют вершину, достижимую из любой вершины, такую, что из нее самой ребер не выходит.