

От кратчайших путей к динамическому программированию

1. Как используя возведение матрицы смежности в степень найти компоненты сильной связности ориентированного графа?
2. Постройте алгоритм, который по данному ориентированному графу с положительными весами находит длину его самого короткого цикла (если в графе циклов нет, то алгоритм должен сообщить об этом). Время работы алгоритма должно быть $O(|V|^3)$.
3. В графе может быть несколько кратчайших путей между какими-то вершинами. Постройте линейный по времени алгоритм, находящий в заданном неориентированном графе с единичными весами количество различных кратчайших путей между заданными двумя вершинами.
4. На вход задачи поступают две последовательности символов x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_m . Требуется найти кратчайшую последовательность z_1, z_2, \dots, z_k , которая содержит и x и y в качестве подпоследовательности. Пример: для $x = aabac$ и $y = bbaca$ искомой последовательностью будет $z = baabaca$.
5. Фирма производит программное обеспечение для банкоматов разных стран мира. Банкомату нужно выдавать запрашиваемую клиентом сумму минимальным количеством купюр.
 1. Если у банкомата есть купюры номиналом 1, 2, 5, 10, 20, 50, а сумма — 71, то набор банкнот будет $50+20+1$. Постройте жадный алгоритм, который будет решать задачу для данного набора купюр и произвольной суммы, которая является входом задачи.
 2. Постройте алгоритм, который решает задачу, в случае когда на вход помимо суммы подаются и номиналы банкнот. Является ли он полиномиальным?
6. Постройте алгоритм со временем работы $O(nt)$ для следующей задачи. На вход задачи подаются положительные целые числа n, a_1, \dots, a_n и t . Необходимо проверить, представимо ли число t в виде суммы из некоторых членов последовательности a_1, \dots, a_n ? Каждое a_i разрешено использовать не более одного раза (можно не использовать вообще).
7. Постройте алгоритм, определяющий, содержит ли данный неориентированный граф (простой) цикл длины 4. Время работы должно быть $O(|V|^3)$.