Графы III. Остовные деревья

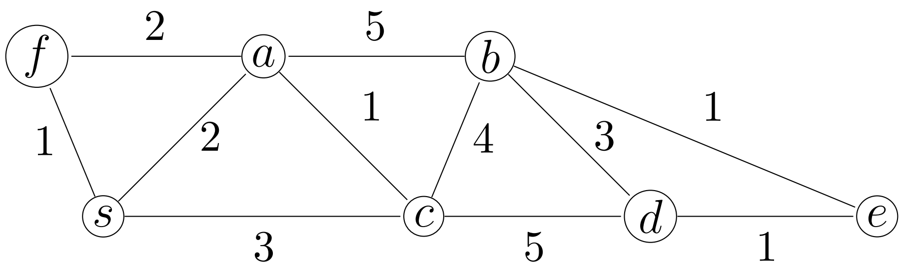

Рис. 4: Граф H.

1. Постройте минимальное остовное дерево графа H

а) по алгоритму Крускала;

б) по алгоритму Прима, начиная с вершины s.

2. Докажите, что если веса всех рёбер неориентированного графа различны, то минимальное остовное дерево единственно.

3. Постройте алгоритм, который находит *максимальное* остовное дерево графа, то есть остовное дерево максимального веса.

4. Дан неориентированный граф $G = (V, E)$, веса рёбер которого не обязательно различны. Для каждого из утверждений ниже приведите доказательство, если оно истинно, или постройте контрпример, если оно ложно:

а) Если в G больше $|V| - 1$ ребра и самое тяжёлое ребро уникально, то это ребро не может быть частью минимального остовного дерева.

б) Если в G есть цикл с уникальным самым тяжёлым ребром e, то e не может быть частью минимального остовного дерева.

в) Дерево кратчайших путей, которое выдаёт алгоритм Дейкстры, является минимальным остовным деревом.

г) Алгоритм Прима корректен даже при наличии в графе рёбер отрицательного веса.

д) Если уменьшить вес одного ребра, входящего в минимальное остовное дерево T, то T останется минимальным остовным деревом.

5. Улучшите алгоритм Крускала и оцените асимптотику получившегося алгоритма для взвешенных графов, веса которых являются целыми числами **а)** от 1 до $|V|$; **б)** от 1 до W для некоторой константы W.