

Домашнее задание

1. Реализуйте стек с помощью двух очередей.

Упражнение 1.⁶ Процедура `Build_Max_Heap` (второе издание Кормена) построения кучи с максимальным свойством работает за линейное время! Попробуйте доказать корректность этой процедуры и получить асимптотическую оценку, не читая доказательства из Кормена или попробуйте изучить доказательство.

2. Опишите способ хранения почти-полного троичного дерева в массиве. Как по номеру клетки родителя вычислить номера детей? Как по номеру ребёнка вычислить номер родителя?

Преамбула. Алгоритм удаления элемента из двоичного дерева поиска (Кормен II) реализован сложнее, чем алгоритм с лекции. Первый использует вспомогательную процедуру `Tree_Successor`, которая по узлу x в двоичном дереве поиска находит следующий по возрастанию за x элемент дерева. Разберитесь с тем как она работает и докажите её корректность — в Кормене доказательство сведено к следующей задаче (упражнению для читателя).

3. Докажите, что если в бинарном дереве поиска у элемента x нет правого ребёнка и у x есть следующий за ним в порядке возрастания элемент y , то y является самым нижним предком⁷ x , чей левый дочерний узел так же является предком x или самим x .

4. Покажите, что если вершина b в бинарном дереве поиска имеет две дочерние вершины, то последующая за ней вершина c не имеет левой дочерней вершины, а предшествующая ей вершина a — правой. Под предшествующей и последующей вершиной понимается, что $a.key \leq b.key \leq c.key$ и в дереве поиска нет ключей в промежутках $(a.key, b.key)$ и $(b.key, c.key)$.

5. Известно, что в структуре данных потребуется хранить k -элементное подмножество A n -элементного множества. После того как в структуру данных будет загружено множество A , с помощью неё будет нужно проверить принадлежит ли A элемент x . Для этого можно совершить не более t запросов к структуре: каждый запрос q представляет собой конечную строку битов, ответ на каждый запрос — один бит.

Структура данных представляет собой таблицу с двумя столбцами: первый столбец состоит из всевозможных запросов q (известных заранее), а правый из битов-ответов на запрос — правый столбец формируется после загрузки в структуру множества A . Пусть $s(n, k, t)$ — минимальное количество строк в такой таблице которое достаточно отвести под такую структуру данных.

1. Чему равно $s(n, k, 1)$?

2*. Найдите $\min_t(s(n, k, t))$, при каком t он достигается?

6 [5.32 ДПВ]. К серверу приходят одновременно n клиентов. Для клиента i известно время его обслуживания t_i . Время ожидания клиента определяется как сумма времени обслуживания всех предыдущих клиентов и времени обслуживания его самого. К примеру, если обслуживает клиентов в порядке номеров, то время ожидания клиента i будет равно $\sum_{j=1}^i t_j$. Постройте эффективный алгоритм, находящий последовательность обслуживания клиентов с минимальным суммарным временем ожидания клиентов.

⁶Под упражнениями мы понимаем задачи, не обязательные для выполнения при решении домашнего задания.

⁷Предком вершины x называют любую вершину, лежащую на пути в x из корня.

7* [вспомните про эту задачу через год]. Докажите, что любую программу, которая использует неограниченную оперативную память, можно реализовать на ограниченном компьютере, который использует конечную оперативную память и два неограниченных стека. Формально, программа имеет вход и выход, и потому реализует функцию — нужно доказать, что эта функция реализуема и на ограниченном компьютере. Такие функция называются *вычислимыми*.