

Домашнее задание

1. Есть полоска ткани длины L (и фиксированной ширины). Его можно разрезать на куски ткани длины l_i и стоимости c_i . Постройте алгоритм, который находит оптимальный способ разрезать полоску ткани на куски (наибольшей суммарной стоимости).

2. Постройте алгоритм, который выводит все двоичные строки длины n , в которых нет двух единиц подряд.

3. В одном языке программирования операция разрезания строки на две части реализовано через копирование. Разрезать строку $w = uv$ на две части u и v будет стоить длину строки $O(|w|)$, где $|w|$ — длина строки w , вне зависимости от длин строк u и v . Постройте алгоритм, который получив на вход строку $w = u_1u_2 \dots u_k$ и номера позиций $i_1 = |u_1|, i_2 = |u_1| + |u_2|, \dots, i_k = |u_1| + \dots + |u_k|$ строит последовательность разрезов строки w , которая приводит к разрезанию w на подстроки u_1, \dots, u_k и использует для этого минимальное число операций.

Заметьте, что в зависимости от порядка разрезов меняется общее число операций: если строку длины 20 нужно разрезать на строки с номерами позиций 3, 10, то отрезав сначала строку в позиции 3 будет затрачено $20 + 17 = 37$ операций, а отрезав сначала строку в позиции 10, будет потрачено $20 + 10 = 30$ операций.

4. Алиса и Боб играют в следующую игру. Есть n карт, на i -й карте записано число $1 \leq a_i \leq n$ (числа могут повторяться!).

Игроки ходят по очереди, первой ходит Алиса. На каждом ходу игрок выбирает карту и выбрасывает её. Кроме того, он выбрасывает все карты, на которых число меньше, чем на выбранной. Формально, если игрок выбирает карту с номером i , он выбрасывает эту карту, а также каждую карту с номером j , такую что $a_j < a_i$.

Игрок проигрывает, если он не может сделать ход, то есть если не осталось карт.

1. Постройте алгоритм, который определяет победителя, если игроки играют оптимально.

2. Постройте жадный алгоритм, решающий эту задачу.

5. Необходимо разбить набор натуральных чисел a_1, \dots, a_n на три части так, чтобы суммы чисел в каждой из частей были одинаковы. Формально, нужно найти разбиение $\{1, \dots, n\} = I \cup J \cup K$ (множества I, J и K попарно не пересекаются), такое что

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} a_j = \sum_{k \in K} a_k = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n a_i.$$

Постройте алгоритм, основанный на динамическом программировании, со временем работы, зависящим полиномиально от n и $\sum_{i=1}^n a_i$.

6 [Шень 8.1.4]. Дан выпуклый n -угольник (заданный координатами своих вершин в порядке обхода). Его разрезают на треугольники диагоналями, для чего необходимо $n - 2$ диагонали (это можно доказать индукцией по n). Стоимостью разрезания назовём сумму длин всех использованных диагоналей. Постройте полиномиальный алгоритм, который находит минимальную стоимость разрезания. (Перебор не подходит, так как число вариантов не ограничено многочленом.)

7*. Фирма производит программное обеспечение для банкоматов разных стран мира. Иногда, купюры какого-то вида заканчиваются и банкомату нужно определить, возможно ли выдать клиенту требуемую сумму. Вход задачи: число n , номиналы купюр v_1, \dots, v_n и сумма клиента s .

Постройте алгоритм, решающий задачу за $O(na \log a)$, где $a = \min a_i$.