Графы I. Поиск в ширину и кратчайшие пути

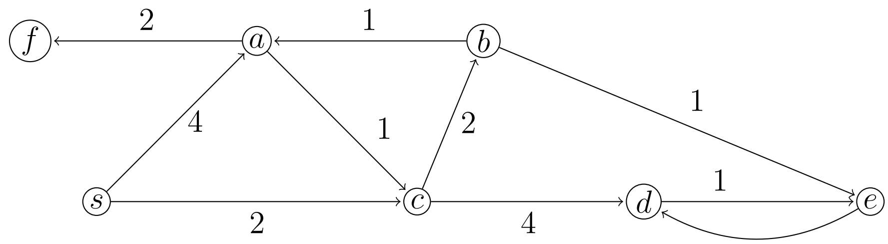

Рис. 1: Граф H.

1. 1. Проведите поиск в ширину в графе G, полученном из графа H стиранием ориентации рёбер (и удалением кратных рёбер). Постройте дерево поиска в ширину.

2. Найдите кратчайшие пути от вершины s до всех вершин, используя алгоритм Дейкстры. Продемонстрируйте работу алгоритма по шагам.

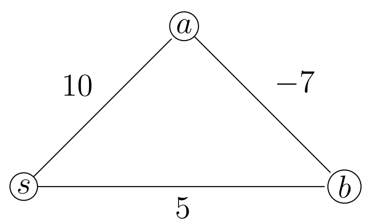

Рис. 2: Граф J.

2. Продемонстрируйте работу алгоритма Беллмана-Форда на графе J (требуется найти кратчайшие пути от вершины s до остальных вершин).

3. В графе с положительными и отрицательными весами на рёбрах провели поиск кратчайших путей от одной вершины до всех остальных, используя алгоритм Беллмана-Форда. Как определить, что в графе нет цикла отрицательного веса?

4. Дан ориентированный граф с (возможно, отрицательными) весами на рёбрах. Известно, что для двух его вершин найдётся кратчайший путь из первой во вторую не более чем из k рёбер. Постройте алгоритм, находящий этот путь за время $O(k|E|)$.

5. Докажите, что рёбра $\{u, \pi[u]\}$, полученные в результате работы алгоритма Дейкстры, образуют дерево.

6. Приведите пример взвешенного ориентированного графа, на котором алгоритм Дейкстры находит кратчайшие пути неправильно.

7. Турнир с $|V|$ вершинами задан в виде матрицы смежности ($|V|^2$ памяти), предложите алгоритм, который находит общий сток за $O(|V|)$ (или говорит, что его нет).

Общим стоком называют вершину, достижимую из любой вершины, такую, что из нее самой ребер не выходит.

8. Допустим, что нам надо нужно найти кратчайшие расстояния от данной вершины в графе с весами рёбер в интервале $0, 1, \ldots W$, где W — сравнительно небольшое число.

1. Покажите, что тогда алгоритм Дейкстры можно модифицировать, получив время работы $O(W|V| + |E|)$.

2. Постройте другой вариант алгоритма с оценкой $O((|V| + |E|)\log|W|)$