

## Введение. Жадные алгоритмы

1. Дана программа

```
for (i = 1; i < n; i += 1) {
  for (j = 0; j < i; j += 1) {
    печать ("алгоритм")
  }
}
```

Пусть  $g(n)$  обозначает число слов “алгоритм”, которые напечатает соответствующая программа. Найдите  $\Theta$ -асимптотику  $g(n)$ .

2. Известно, что для семейства функций  $f_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$  справедливо

$$\exists C \geq 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall i, \forall n \geq N : f_i(n) \leq Cn.$$

1. Верно ли, что  $f_1 + f_2 = O(n)$ ?

2. Определим  $g(n) = f_1(n) + f_2(n) + \dots + f_n(n)$ . Верно ли, что  $g(n) = O(n)$ ? При положительном ответе приведите доказательство, при отрицательном — контрпример и лучшую верхнюю оценку.

3. Приведите верхние и нижние оценки на функции  $h_1(n) = n \times f_1(n)$ ,  $h_2(n) = n^2 \times (1 + f_2(n))$  и приведите примеры функций  $f_1$  и  $f_2$ , на которых эти оценки достигаются.

3. На вход подаётся последовательность чисел  $x_1, \dots, x_n$ . Необходимо найти максимальное произведение двух различных элементов последовательности, кратное 15. Формально, нужно найти  $\max_{i \neq j} \{x_i \times x_j \mid x_i \times x_j : 15\}$ . Постройте онлайн-алгоритм, решающий задачу и использующий  $O(1)$  битов памяти и  $O(1)$  регистров (в каждом из которых может храниться число  $x_i$ ).

4 [Шень 1.3.1 (в,д)]. Постройте линейный по времени онлайн-алгоритм, который вычисляет следующие функции или укажите индуктивные расширения для следующих функций:

а) второй по величине элемент последовательности целых чисел (тот, который будет вторым, если переставить члены в неубывающем порядке);

б) максимальная длина монотонного (неубывающего или невозрастающего) участка из идущих подряд элементов в последовательности целых чисел;

5 [Шень 1.3.2]. Даны две последовательности целых чисел  $x[1] \dots x[n]$  и  $y[1] \dots y[k]$ . Выясните, является ли вторая последовательность подпоследовательностью первой, то есть можно ли из первой вычеркнуть некоторые члены так, чтобы осталась вторая. Число действий  $O(n + k)$ .

6. На вход подаётся число  $k$  и последовательность из нулей и единиц, которая заканчивается специальным маркером конца ввода  $\$$ . Докажите, что любой онлайн-алгоритм, который проверяет, что на  $k$ -ом месте от конца последовательности стоит 1 использует  $\Omega(k)$  битов памяти.