Домашнее задание

1. Решите уравнения в целых числах, используя расширенный алгоритм Евклида: **а)** $238x + 385y = 133$; **б)** $143x + 121y = 52$.

2. Вычислите $7^{13} \mod 167$, используя алгоритм быстрого возведения в степень.

3 [ДПВ 1.8]. Доказать корректность рекурсивного алгоритма умножения Divide (раздел 1.1., рис. 1.2.) и получить верхнюю оценку на время работы.

4. Функции $T_1(n)$ и $T_2(n)$ заданы рекуррентными формулами, известно что $T_i(1) = T_i(2) = T_i(3) = 1, i = 1, 2$.

1. Найдите асимтотику роста функции $T_1(n) = T_1(n-1) + cn$ (при $n > 3$);

2. Докажите, что для функции $T_2(n) = T_2(n-1) + 4T_2(n-3)$ (при $n > 3$) справедлива оценка $\log T_2(n) = \Theta(n)$.

3*. Найдите (точную) асимтотику роста функции $T_2(n)$.

5 [Шень **1.1.17**]. Добавим в алгоритм Евклида дополнительные переменные `u`, `v`, `z`:

```
 m := a; n := b; u := b; v := a;
{инвариант: НОД (a,b) = НОД (m,n); m,n >= 0 }
while not ((m=0) or (n=0)) do begin
| if m >= n then begin
| | m := m - n; v := v + u;
| end else begin
| | n := n - m; u := u + v;
| end;
end;
if m = 0 then begin
| z:= v;
end else begin {n=0}
| z:= u;
end;
```

Докажите, что после исполнения алгоритма значение `z` равно удвоенному наименьшему общему кратному чисел `a`, `b`: `z` $= 2 \cdot$ `НОК(a,b)`.

6*. Предложите $O(\sqrt{m}\log m)$ алгоритм нахождения длины периода десятичной дроби $\frac{n}{m}$. Докажите его корректность и оцените асимптотику.

7*. Доказать, что `inv(i, p): return i > 1 ? -(p/i)*inv(p%i, p) % p : 1` возвращает обратный остаток, доказать, что работает за логаримф и развернуть рекурсию.

8*. $f(1) = g(1) = 1$ $f(n) = a \cdot g(n-1) + b \cdot f(n-1)$ $g(n) = c \cdot g(n-1) + d \cdot f(n-1)$ где a, b, c, d положительные константы. Предложите алгоритм вычисляющий $f(n)$ со сложностью $O(\log n)$ арифметических операций.