

Введение. Верхние и нижние оценки сложности алгоритмов

1. Дана программа

```
for (i = 1; i < n; i += 1) {
  for (j = 0; j < i; j += 1) {
    печать ("алгоритм")
  }
}
```

Пусть $g(n)$ обозначает число слов “алгоритм”, которые напечатает соответствующая программа. Найдите Θ -асимптотику $g(n)$.

2. Известно, что для семейства функций $f_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ справедливо

$$\exists C \geq 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall i, \forall n \geq N : f_i(n) \leq Cn.$$

1. Верно ли, что $f_1 + f_2 = O(n)$?

2. Определим $g(n) = f_1(n) + f_2(n) + \dots + f_n(n)$. Верно ли, что $g(n) = O(n)$? При положительном ответе приведите доказательство, при отрицательном — контрпример и лучшую верхнюю оценку.

3. Приведите верхние и нижние оценки на функции $h_1(n) = n \times f_1(n)$, $h_2(n) = n^2 \times (1 + f_2(n))$ и приведите примеры функций f_1 и f_2 , на которых эти оценки достигаются.

3. Докажите, что $\log(n!) = \Theta(n \log n)$.

4. Дана программа

```
for (bound = 1; bound < n; bound *= 2) {
  for (i = 0; i < bound; i += 1) {
    for (j = 0; j < n; j += 2)
      печать ("алгоритм")
    for (j = 1; j < n; j *= 2)
      печать ("алгоритм")
  }
}
```

Пусть $g(n)$ обозначает число слов “алгоритм”, которые напечатает соответствующая программа. Найдите Θ -асимптотику $g(n)$.

5. Докажите, не используя интегрального исчисления, что асимптотика $\sum_{i=1}^n i^\alpha = \Theta(n^{1+\alpha})$, если $\alpha > 0$.

6. Найдите Θ -асимптотику функций:

а) $f(n) = \binom{n}{k}$; б) $g(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$; в) $h(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.

7*. Докажите, не используя интегрального исчисления, что асимптотика $\sum_{i=1}^n i^\alpha = \Theta(n^{1+\alpha})$, если $\alpha > -1$.