

1. Решите уравнения в целых числах, используя расширенный алгоритм Евклида:

а) $238x + 385y = 133$; б) $143x + 121y = 52$.

2. Вычислите $7^{13} \bmod 167$, используя алгоритм быстрого возведения в степень.

3[ДПВ 1.8]. Доказать корректность рекурсивного алгоритма умножения Divide (раздел 1.1., рис. 1.2.) и получить верхнюю оценку на время работы.

4. Функции $T_1(n)$ и $T_2(n)$ заданы рекуррентными формулами, известно что при $i = 1, 2$ справедливо $T_i(1) = T_i(2) = T_i(3) = 1$.

1. Найдите асимптотику роста функции $T_1(n) = T_1(n - 1) + cn$ (при $n > 3$);

2. Докажите, что для функции $T_2(n) = T_2(n - 1) + 4T_2(n - 3)$ (при $n > 3$) справедлива оценка $\log T_2(n) = \Theta(n)$.

3*. Найдите (точную) асимптотику роста функции $T_2(n)$.

5 [Шень 1.1.17]. Добавим в алгоритм Евклида дополнительные переменные u, v, z :

```

m := a; n := b; u := b; v := a;
{инвариант: НОД (a,b) = НОД (m,n); m,n >= 0 }
while not ((m=0) or (n=0)) do begin
  | if m >= n then begin
  | | m := m - n; v := v + u;
  | end else begin
  | | n := n - m; u := u + v;
  | end;
end;
if m = 0 then begin
  | z:= v;
end else begin {n=0}
  | z:= u;
end;

```

Докажите, что после исполнения алгоритма значение z равно удвоенному наименьшему общему кратному чисел a, b : $z = 2 \cdot \text{НОК}(a, b)$.

6*. Предложите полиномиальный алгоритм нахождения периода десятичной дроби $\frac{n}{m}$. Докажите его корректность и оцените асимптотику.

7*. Доказать, что $\text{inv}(i, p): \text{return } i > 1 ? -(p/i)*\text{inv}(p\%i, p) \% p : 1$ возвращает обратный остаток, доказать, что работает за логарифм и развернуть рекурсию.

8*. $f(1) = g(1) = 1$ $f(n) = a \cdot g(n - 1) + b \cdot f(n - 1)$ $g(n) = c \cdot g(n - 1) + d \cdot f(n - 1)$ где a, b, c, d положительные константы. Предложите алгоритм вычисляющий $f(n)$ со сложностью $O(\log n)$ арифметических операций.