Во всех задачах этой недели мы полагаем, что арифметические операции стоят $O(1)$.

1. Докажите, что для произвольной константы $c > 0$ функция $g(n) = 1 + c + c^2 + \ldots + c^n$ есть

(a) $\Theta(1)$, если $c < 1$;

(b) $\Theta(n)$, если $c = 1$;

(c) $\Theta(c^n)$, если $c > 1$.

2 [Шень 1.3.1 (а,б,г)]. Постройте линейный по времени онлайн-алгоритм, который вычисляет следующие функции или укажите индуктивные расширения для следующих функций:

а) среднее арифметическое последовательности чисел;

б) число элементов последовательности целых чисел, равных её максимальному элементу;

в) максимальное число идущих подряд одинаковых элементов;

3. Дано три отсортированных по возрастанию массива, внутри каждого массива все элементы различные. Предложите[1] линейный алгоритм нахождения числа различных элементов в объединении массивов.

4. На вход подаётся последовательность чисел $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$. Постройте онлайн-алгоритм, который вычисляет сумму $\sum\limits_{i \neq j} a_i \times b_j$.

5. Дана последовательность целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Необходимо найти её самую длинную строго возрастающую подпоследовательность. Предложите **а)** $O(n^2)$ алгоритм (докажите его корректность и асимптотику); **б***) [Шень **1.3.3**] $O(n \log n)$ алгоритм.

6*. На вход подаётся последовательность натуральных чисел $x_1, \ldots x_n$ в которой один из элементов встречается строго больше, чем $\frac{n}{2}$ раз. Постройте алгоритм, который находит этот элемент, и при этом может использовать в качестве внешней памяти только стек (в который можно помещать только элементы последовательности), операции со стеком стоят $O(1)$ времени; в оперативной памяти программа использует $O(1)$ битов памяти и $O(1)$ регистров (в каждом из которых может храниться число x_i).

Числа x_i идут потоком данных на вход и каждое доступно для считывания только один раз — вернуться обратиться к прочитанным ранее числам можно, только если сохранить их в памяти.

7*. Дано натуральное N. Подсчитайте количество решений неравенства $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < N$ в натуральных (неотрицательных целых) числах, не используя операций с вещественными числами. Требуется предложить линейный (с асимптотикой $O(N)$) алгоритм.

[1] Здесь и всюду далее мы требуем не только описание алгоритма, но и доказательство его корректности, а также доказательство оценок на время работы алгоритма.