**1.** Дан неориентированный граф $G = (V, E)$, веса рёбер которого не обязательно различны. Для каждого из утверждений ниже приведите доказательство, если оно истинно, или постройте контрпример, если оно ложно:

**а)** Если самое лёгкое ребро графа $G$ уникально, то оно входит в любое минимальное остовное дерево.

**б)** Если ребро $e$ входит в некоторое минимальное остовное дерево, то оно является самым лёгким ребром из пересекающих некоторый разрез.

**в)** Кратчайший путь между двумя вершинами является частью некоторого минимального остовного дерева.

**Определение.** Граф, который получается из графа $G$ удалением некоторых вершин и рёбер, называют *(рёберным) подграфом* графа $G$. В случае, если при изготовлении подграфа, рёбра удалялись только вместе с удалением вершин, подграф называют *индуцированным.*

**2.** Пусть $T$ — минимальное остовное дерево графа $G$, а $H$ — связный подграф $G$. Покажите, что рёбра, входящие как в $T$, так и в $H$, входят в некоторое минимальное остовное дерево графа $H$.

**3.** Рассмотрим алгоритм Union-Find без улучшения со сжатием путей[1]. Приведите последовательность из $m$ операций Union и Find над множеством из $n$ элементов, которая потребует времени $\Omega(m \log n)$.

**4.** На вход задачи подаётся неориентированный взвешенный граф $G(V, E)$ и подмножество вершин $U \subseteq V$. Необходимо построить остовное дерево, минимальное (по весу) среди деревьев, в которых все вершины $U$ являются листьями (но могут быть и другие листья) или обнаружить, что таких остовных деревьев нет. Постройте алгоритм, который решает задачу за $O(|E| \log |V|)$. Обратите внимание, что искомое дерево может не быть минимальным остовным деревом.

[1] При вызове $\mathrm{Find}(x)$ все предки $x$ вместе с $x$ становятся детьми корня.