

## От кратчайших путей к динамическому программированию

1. Как используя возведение матрицы смежности в степень найти компоненты сильной связности ориентированного графа?

2. Постройте алгоритм, который по данному ориентированному графу с положительными весами находит длину его самого короткого цикла (если в графе циклов нет, то алгоритм должен сообщить об этом). Время работы алгоритма должно быть  $O(|V|^3)$ .

3. В графе может быть несколько кратчайших путей между какими-то вершинами. Постройте линейный по времени алгоритм, находящий в заданном неориентированном графе с единичными весами количество различных кратчайших путей между заданными двумя вершинами.

**Определение.** Пусть  $G$  — связный неориентированный граф, а  $d_{u,v}$  — кратчайшее расстояние между вершинами  $u$  и  $v$ . *Диаметром* графа  $G$  называют число  $\max_{u,v} d_{u,v}$  (максимальную из длин кратчайших простых путей между каждой парой вершин графа).

4. Постройте алгоритм, который находит диаметр дерева за  $O(|V|)$ ;

5. Граф  $G$  — ориентированный граф, полученный из корневого дерева с неотрицательными весами на рёбрах ориентацией рёбер от корня к листьям.

1. Предложите алгоритм поиска кратчайших путей от вершины  $s$  до остальных вершин и оцените его сложность.

2. Граф  $G'$  получается из  $G$  добавлением рёбер с неотрицательным весом от каждого листа в корень. Опишите эффективный алгоритм поиска кратчайшего расстояния между двумя данными вершинами в  $G'$  и оцените его сложность.

6. Постройте алгоритм, определяющий, содержит ли данный неориентированный граф простой цикл длины 4. Время работы должно быть  $O(|V|^3)$ .

7. Дан орграф, вам нужно найти длины кратчайших путей от вершины  $v$  до всех остальных вершин. В графе могут быть рёбра отрицательного веса, но только те, которые выходят из  $v$ . Предложите эффективный алгоритм, докажете его корректность и оцените асимптотику.