«Основные алгоритмы»

избранные решения

1. Докажите, что асимптотика $\sum\limits_{i=1}^{n} i^{\alpha} = \Theta(n^{1+\alpha})$, если $\alpha > -1$.

Решение. В случае $\alpha > 0$ работает стандартная оценка максимальным и средним членами:

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha+1} = \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} \left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha} \leqslant \sum_{i=1}^{n} i^{\alpha} \leqslant \sum_{i=1}^{n} n^{\alpha} = n^{\alpha+1}$$

Рассмотрим случай $-1 < \alpha \leqslant 0$ и положим $\beta = -\alpha$. Докажем по индукции, что

$$\frac{1}{1^{\beta}} + \frac{1}{2^{\beta}} + \ldots + \frac{1}{n^{\beta}} \leqslant cn^{1-\beta}$$

для некоторой константы $c \geqslant 2$ (саму константу мы точно указывать не будем).

База: $\frac{1}{1^{\beta}} + \frac{1}{2^{\beta}} \leqslant 2 \leqslant c2^{1-\beta}$, при $c \geqslant 2$.

Шаг индукции. По предположению индукции справедливо

$$\frac{1}{1^{\beta}} + \frac{1}{2^{\beta}} + \ldots + \frac{1}{n^{\beta}} + \frac{1}{(n+1)^{\beta}} \leqslant cn^{1-\beta} + \frac{1}{(n+1)^{\beta}}$$

Докажем, что

$$cn^{1-\beta} + \frac{1}{(n+1)^{\beta}} \leqslant c(n+1)^{1-\beta}.$$

$$cn^{1-\beta}(n+1)^{\beta} + 1 \leqslant c(n+1)^{1-\beta}(n+1)^{\beta}$$

$$cn\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\beta} + 1 \leqslant c(n+1)$$

По формуле Тейлора $(1+\frac{1}{n})^\beta = 1 + \frac{\beta}{n} + o(\frac{1}{n})$. Получаем

$$cn\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta + 1 = cn + c\beta + 1 + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поскольку $\beta < 1$, то при большом c получаем, что $c\beta + 1 + o(\frac{1}{n}) \leqslant c$, откуда $cn + c\beta + 1 + o(\frac{1}{n}) \leqslant cn + c$, что и завершает доказательство.

2. Докажите, что нельзя найти самую тяжелую и вторую по тяжести монету из n монет за менее чем $n + \log n + c$ взвешиваний.
Решение. Построим стратегию противника. Для этого будем хранить списки (множества) монет:

MC (max-candidates) монеты, которые ни разу не проигрывали;

X_i монеты, проигравшие только i-ой монете — список кандидатов на второй максимум при $i \in MC$

NC (non-candidates) монеты, которые легче хотя бы ещё двух.

Обозначим строчными буквами количество элементов в данных множествах.

Опишем стратегию противника. Пусть взвешиваются монеты i и j. Монета i побеждает во взвешивании, если

- $i \in MC$ и $j \notin MC$;
- $i \in X_a$ $(a \in MC)$ и $j \in NC$;

  (на множествах задан приоритет $MC > X_i > NC$.)
- $i, j \in MC$ и $x_i \geqslant x_j$ (побеждает тот, кто уже выигрывал больше);

  В остальных случаях ответ произвольный, но согласован с результатами предыдущих взвешиваний.

Обозначим для удобства $X = \bigcup\limits_{i \in MC} X_i$ и соответсвенно $x = \sum\limits_{i \in MC} x_i$.

Для доказательства нижней оценки будем отслеживать изменение вектора количества монет в указанных множествах

$$(mc,\ x,\ nc)$$

после каждого взвешенивания: обозначим через a^t — компоненту вектора, определённого после t-го взвешивания ($a = mc, x, nc$). В самом начале вектор имеет вид $(n, 0, 0)$ после решения задачи $(1, 1, n-2)$. Действительно, если бы в MC было бы больше одного элемента, то максимум был бы не определён, а если бы в $X = X_i$ (i — максимум) было больше одной монеты, то был бы не определён второй максимум.

Заметим, что при выбранной стратегии, после каждого взвешивания величина mc уменьшается не более, чем на 1 — отсюда берётся уже известное $n - 1$ взвешивание для поиска максимума.

Дополнительный логарифм берётся из оценки изменения компоненты x. Приведём сначала неформальное рассуждение, которое объясняет суть дела, после чего приведём формальное доказательство. Величина x уменьшается не более чем в два раза. Максимальное уменьшение возможно, когда сравниваются два кандидата $i, j \in MC$, у которых одинаковое и наибольшее количество проигравших ($x_i = x_j = x/2$). Точнее,

$$x^{t+1} \geqslant x^t/2 + 1 \tag{1}$$

и при этом $m^{t+1} = m^t - 1$: один из кандидатов на максимум становится кандидатом на второй максимум — такие взвешивания уже были учтены нами выше. Осталось отметить, что каждая монета из MC, которая не является максимумом, рано или поздно попадает в множество X. Поэтому, после того как в MC осталась одна монета i (максимум), то в списке X_i побывало не меньше $\log_2 n + c'$ монет, а исключить монеты из множества X_i возможно только взвешивая их между собой затратив на это $\log n + c' - 1$ взвешиваний.

Формализуем наблюдение. Будем следить за парой параметров

$$mc \quad \text{и} \quad \sum_{i \in MC} 2^{x_i}.$$

В самом начале пара имеет значение (n, n), а в конце $(1, 2)$. Докажем, что если после взвешивания произошло изменение параметров, то случилось одно из двух: либо первый параметр уменьшился на 1, а второй при этом не уменьшился, либо второй параметр уменьшился не больше, чем вдвое, а первый не изменился. Первый параметр меняется, только если обе монеты i, j из множества MC. При обосновании неравенства (1) было показано, что проигравшая монета j попадает в список победителя i, и, поскольку $x_i > x_j$, получаем $2^{x_i} + 2^{x_j} \leqslant 2^{x_i+1}$ — не смотря на то, что степень двойки 2^{x_j} пропала из суммы, сама сумма не уменьшилась!

Согласно объявленной стратегии, монеты из MC выигрывают у монет из остальных множеств, а потому, при уменьшении второго параметра, которое как мы показали возможно если только взвешивается хотя бы одна монета не из MC, первый параметр измениться не может. Если второй параметр уменьшился, то из множества X исчезла ровно одна монета — больше, согласно стратегии, может исчезнуть, только если во взвешивании участвовала монета из MC. Таким образом, второй параметр уменьшился не более, чем в два раза, поскольку в два раза уменьшилось ровно одно слагаемое: $2^{x_j} \to 2^{x_j-1}$.

Итак, чтобы уменьшить до единицы первый параметр, необходимо совершить не менее $n-1$ взвешивания, а чтобы уменьшить второй до двойки — не менее, чем $\log_2 n - 1$ взвешиваний. Получаем отсюда заявленную оценку.