

## Графы IV. Остовные деревья

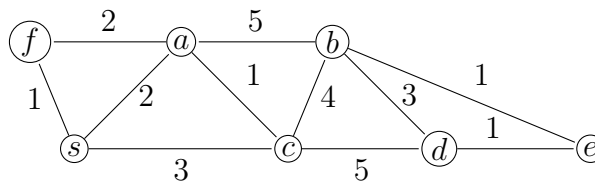


Рис. 1: Граф  $H$ .

1. Постройте минимальное остовное дерево графа  $H$ 
  - а) по алгоритму Крускала;
  - б) по алгоритму Прима, начиная с вершины  $s$ .
  
2. Докажите, что если веса всех рёбер неориентированного графа различны, то минимальное остовное дерево единственно.
  
3. Как найти *максимальное* остовное дерево графа, то есть остовное дерево максимального веса?
  
4. Дан неориентированный граф  $G = (V, E)$ , веса рёбер которого не обязательно различны. Для каждого из утверждений ниже приведите доказательство, если оно истинно, или постройте контрпример, если оно ложно:
  - а) Если в  $G$  больше  $|V| - 1$  рёбра и самое тяжёлое ребро уникально, то это ребро не может быть частью минимального остовного дерева.
  - б) Если в  $G$  есть цикл с уникальным самым тяжёлым ребром  $e$ , то  $e$  не может быть частью минимального остовного дерева.
  - в) Дерево кратчайших путей, которое выдаёт алгоритм Дейкстры, является минимальным остовным деревом.
  - г) Алгоритм Прима корректен даже при наличии в графе рёбер отрицательного веса.
  - д) Если уменьшить вес одного ребра, входящего в минимальное остовное дерево  $T$ , то  $T$  останется минимальным остовным деревом.
  
5. Улучшите алгоритм Крускала и оцените асимптотику получившегося алгоритма для взвешенных графов, веса которых являются целыми числами в диапазоне
  - а) от 1 до  $|V|$ ;    б) от 1 до  $W$  для некоторой константы  $W$ .