АЛКТГ::Семестровая контрольная I 2021

Указания, решения и критерии проверки

Критерии описывают только типовые случаи, выявленные при проверке, но не являются исчерпывающими. В случае некритериальных случаев проверяющий при простановки баллов исходит из значительности допущенных ошибок и доли верного решения задачи в тексте.

Описание критериев:

Критерии.

+1 Означает, что описанная в пункте часть решения стоит 1 балл.

-1 Означает, что за описанную в пункте ошибку снимается 1 балл.

Приведите ответ (обоснование не требуется).

1 (2). Опишите булеву функцию $f(x, y, z)$ формулой, используя только логические связки $\wedge, \neg$, в которой будут использованы все три переменные, но при этом f принимает значение 1 на любом наборе переменных x, y, z.
Ответ: $\overline{(\overline{x} \wedge x) \wedge (\overline{y} \wedge y) \wedge (\overline{z} \wedge z)}$**;** $\overline{(\overline{x} \wedge x) \wedge y \wedge z}$

2(2). На рынке можно купить акции 11 компаний и студент решил купить 70 акций. Найдите число способов это сделать (порядок покупки неважен).
Ответ: $\binom{80}{10}$

3 (2). Приведите пример множеств A и B, таких что $A \subseteq A \triangle B$, $B \subseteq A$ и $|A| + |B| = 10$.
Ответ: $A = \{1, \ldots, 10\}$**,** $B = \varnothing$

4 (2). G — дерево на 20 вершинах. Сколько рёбер в графе $\overline{G}$? Ответом должно быть число в десятичной записи
Ответ: $\binom{20}{2} - 19 = 171$

5 (3). Сколько существует 10-значных чисел у которых есть хотя бы одна четная цифра и хотя бы одна нечетная цифра?
Ответ: $9 \cdot 10^9 - 4 \cdot 5^9 - 5^{10} = 9 \cdot (10^9 - 5^9) = 9 \cdot 5^9 \cdot (2^9 - 1)$

Приведите определение. Обоснованно ответьте на вопрос, опираясь на определение

Критерии. (Для всех задач раздела).

+1 Верное определение.

+2 Верный ответ на контрольный вопрос.

6(3). *Сюръекция.* Существует ли конечное множество A такое, что $|A| > 1$ и можно построить сюръекцию $f : A \to A \times A$?

Решение. Не существует. Сюръекция — отображение $f : X \to Y$, такое, что $\forall y \in Y \ \exists x \in X : f(x) = y$. Мощность образа множества не больше мощности его самого (простое следствие из определения функции). А в случае конечных A $|A \times A| = |A|^2 > |A|$. Противоречие.

7(3). *Унарный предикат.* Пусть юниверсум $U = \mathbb{Z}$. Найдите все предикаты $P(x)$, для которых верно утверждение $\forall x \forall y \big((P(x) \wedge P(y)) \to ((x \leqslant y) \to (x < y)) \big)$.

Решение. $P(x)$ — тождественно ложный предикат. Действительно, при $x = y$ истинно $x \leqslant y$ и ложно $x < y$, у следствия истинна посылка и ложно следствие — а значит, само следствие ложно. Значит, для истинности должна быть ложной посылка $P(x) \wedge P(y) = P(x)$.

8 (3). *Правильная раскраска графа в k цветов.* Существует ли (простой) неориентированный граф на 2021 вершине, в котором размер любого независимого множества вершин не превосходит 505, и который при этом является 3-раскрашиваемым?

Решение. Граф раскрашиваем в k цветов, значит, в нём найдётся k долей, являющихся независимыми множествами (раскрашенных в один цвет). Если предположить, что каждая из долей имеет мощность не более 505 (соответственно условию), то суммарно вершин наберётся не более 1515. Противоречие.

Приведите обоснованные решения

9 (4). Сколькими способами можно посадить за круглый стол с пронумерованными местами $n > 1$ супружеских пар так, чтобы мужчины и женщины чередовались и все супруги сидели рядом?

Решение. Расставим партнёров в ряд и замкнём затем этот ряд в кольцо.
Может быть так, что мы ставим партнёров на $2k-1$ и $2k$-е места. Начать можем как с мужа, так и с жены. Это определяет порядок мужа и жены в каждой паре, поэтому пары можем рассматривать как единое целое; получаем $n!$ перестановок пар и ещё умножаем на 2 для определения, мужчина или женщина раньше.
Может быть и так, что мы ставим партнёров на $2k$ и $2k+1$-е места, а первого ставим с $2n$-ым. Вновь: $(n-1)!$ расстановок пар, n способов выбрать того, кто будет стоять с разных концов ряда; и вдвое больше для определения, мужчина первым или женщина.
Итого $2 \cdot 2 \cdot n!$.

Критерии.

-2 Рассмотрен только первый или только второй случай.

-2 Ответ в $2n$ раз меньше: как будто места не пронумерованы.

-2 ответ в 2 раза меньше, не учтено, что жена может сидеть справа или слева от мужа

-2 Считают, что n — число людей.

-2 ответ больше в n раз, дважды учтен выбор места.

10 (4). Найдите число отображений f из множества $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ в $\{a,b,c,d\}$ таких что $|f^{-1}(\{a,b\})| = 4$, а $|f(\{1,2,3,4\})| = 4$.

Решение. Поскольку $|\{a,b,c,d\}| = 4 = |f\{1,2,3,4\}|$, то образы элементов $\{1,2,3,4\}$ можно задать $4!$ способами. У a и b по одному прообразу среди первых четырех, значит, ещё два должны быть среди $\{5,6,7\}$. Элемент, образом которого является не a и не b, может отображаться в c или d (куда-то обязан, т. к. отображение всюду определено). Это можно выбрать $2\cdot 3 = 6$ способами. Для оставшихся же двух элементов есть 4 способа отобразить их в a и b. Всего $4\cdot 6\cdot 4! = 24^2 = 576$ отображений.

Критерии.

-2 Вместо отображения задача решается для частичной функции

-2 Ошибка при вычислении количества вариантов для образа $\{5,6,7\}$ (при этом изложена логика решения задачи).

11 (4). Докажите, что если в связном (простом) неориентированном графе степени всех вершин чётные, то в нем нет мостов, т.е. рёбер, удаление которых сделает граф несвязным.

Решение. Способ 1. Граф связен и степени всех вершин чётны, значит, есть замкнутый эйлеров маршрут (проходящий по каждому ребру ровно один раз), значит при удалении любого ребра связность сохраняется (по замкнутому маршруту можно пройти в обратную сторону).

Способ 2. Пусть есть мост; тогда после его удаления вершины, бывшие его концами, приоборели нечётную степень, а остальные степени остались как есть. Если связность пропала, то в каждой компоненте есть по одной вершине нечётной степени, что противоречит лемме о рукопожатиях.

12 (5(9*)). Два шахматных клуба организовали двухдневный товарищеский турнир и составили расписание. Каждый шахматист играет по три игры каждый день. После составления расписания организаторы сообразили, что важно, чтобы каждый шахматист в какой-то партии играл белыми, а в какой-то чёрными; им требуется уточнить расписание для выполнения этого условия.

1. Докажите, что уточнение возможно для расписания первого дня, в котором будут партии только между шахматистами из разных клубов.

2*. Докажите, что уточнение возможно и для второго дня, в котором могут быть партии между шахматистами из одного клуба

Решение только первого пункта стоит 5 баллов, решение обоих пунктов или только второго — 9 баллов.

Решение. 1. Представим турнир первого дня как двудольный граф $G(L\cup R, E)$ (игроки одного клуба в одной доле). В каждой доле одинаковое число вершин: если $|L| < |R|$, то из L

выходит меньше рёбер, чем входит в R: $|E| = 3|L| = 3|R|$. Докажем, что для G выполняется условие Холла: $\forall S \subseteq L |N(S)| \geqslant S$. От противного: пусть $|N(S)| < S$ для некоторого $S \subseteq L$, тогда из S выходит $3|S|$ рёбер, которые входят в меньше чем $|S|$ вершин — значит в $N(S)$ есть вершина со степенью больше 3, что невозможно. Мы доказали, что в G есть совершенное паросочетание M — рёбрам соответствуют игры. Пусть во всех играх M белыми ходили игроки первого клуба, а во всех остальных — второго клуба. Таким образом мы выполнили условие расписания.

Критерии.

- -1 Не доказано, что в каждой доле одинаковое число вершин
- -2,5 Ссылка на существование совершенного паросочетания в регуляном двудольном графе без доказательства

Решение. 2. В общем случае разобьём вершины на пары (вершин чётное число, потому что каждая вершина нечётной степени) и соединим вершины из одной пары ребром. Получим граф, в каждой компоненте связности которого есть замкнутый эйлеров маршрут. Выпишем вершины в порядке такого маршрута и скажем, что игрок v_i в партии с v_{i+1} играл белыми (а v_{i+1} соответственно чёрными), если такая партия есть в расписании. Заметим, что после удаления добавленных рёбер для каждого игрока v будет участок маршрута u, v, w в котором партии u, v и v, w есть в расписании

У этой задачи есть и другой спопосб решения. Опишем кратко его идею. Будем последовательно удалять из G рёбра циклов; после удаления цикла выбираем цвет фигур аналогично эйлерову маршруту. После удаления циклов останется лес (граф, в котором каждая компонента связности дерево). Заметим, что все висячие вершины лежали на каком-то цикле, поэтому для них условие уже выполнено. Подвесим каждое дерево за висячую вершину как за корень и объявим что вершины i-го уровня в партиях с вершинами $i+1$-го уровня играли белыми