Алгебра логики, комбинаторика, теория графов

Решения и критерии проверки семестровой контрольной I

15 ноября 2019 г.

Общие положения

Изменения в условия, оглашённые во время проведения контрольной (записанные на доске), выделены подчёркиванием.

Приведённые ниже критерии не являются исчерпывающими. В некритериальных случаях (второй и третьей части) проверяющие ориентируются на следующие границы. Если есть существенная ошибка, не позволяющая считать решение полностью верным, но не меняющая сути решения, снимается порядка четверти баллов. Половина баллов снимается, если задача решена наполовину или если в решении есть существенные недочёты, не позволяющие считать задачу полностью решённой, однако задача в целом решена. До четверти баллов выставляется, если есть серьёзное продвижение, но в целом задача не решена.

В случае, если в задачах второй и третьей части допущена несущественная арифметическая ошибка, снимается -0,5 балла. В задачах второй части определение стоит 1 балл, а контрольный вопрос — 2 балла. В случае, если в задаче 3-ей части решение необоснованно, оценка за задачу не превосходит половину баллов. Формулы без пояснений считаются необоснованными.

Основная цель показа работ — дать студентам обратную связь и объяснить ошибки, в случае их непонимания. В процессе показа работ исправляются технические ошибки, допущенные при проверке; они могут привести как к повышению, так и к понижению суммы баллов.

Мы отрицательно относимся к деятельности «поиска баллов любой ценой до следующего порога оценки» вместо обсуждения и анализа своих ошибок. Если подобная деятельность переходит рамки разумного, проверяющий в праве направить работу на полный пересмотр комиссии или лектору.

Апелляция допустима, в случае противоречия критериальному случаю (по мнению студента). Об этом нужно сообщить семинаристу, и если семинарист согласится с доводами студента при просмотре работы, работа будет пересмотрена комиссией (полностью).

Оценивание

неуд	удовл	хорошо	отлично
1: 2, **2:** 5	**3:** 12, **4:** 15	**5:** 21, **6:** 24, **7:** 29	**8:** 34, **9:** 39, **10:** 45

В случае баллов между границами происходит линейная аппроксимация и выставляется дробная оценка с точностью до сотых. Поскольку во втором варианте была снята задача 6, то её два балла распределены равномерно среди первых 24 баллов (учтено при подсчётах в таблице); если студент набрал 24 балла или более, к ним прибавляется 2 балла.

Решения и критерии

Приведите ответ (обоснование не требуется).

1 $\langle \mathrm{i} \rangle$ (1). Найдите число семиэлементных подмножеств девятиэлементного множества. Ответом должно быть число в десятичной записи.

1 ⟨ii⟩. Найдите число слов в двоичном алфавите длины 10, в которых ровно 6 единиц.

Решение.

1 ⟨i⟩. $\binom{9}{7} = 36$

1 ⟨ii⟩. $\binom{10}{6} = 210$

□

Критерии.

1. 0 баллов, если ответ и формула неверные
2. 0.5 балла, если формула верная, а ответ неверный (вследствии арифметической ошибки) или отсутствует

2 ⟨i⟩ (2). Найдите фиктивные переменные у булевой функции, заданной вектором значений 11001100.

2 ⟨ii⟩. Найдите фиктивные переменные у булевой функции, заданной вектором значений 00110011.

(Убрано «Ответом должно быть число в десятичной записи.»)

Решение.

В обоих вариантах x_1, x_3 — фиктивные переменные.

□

Критерии.

1. 0 баллов за неверный ответ
2. ответ 2 считается верным и стоит 2 балла

3 ⟨i⟩ (2). Лесом называется граф, компонентами связности которого являются деревья. Найти количество рёбер в лесу, содержащем 2019 вершин и 100 компонент связности. Ответом должно быть число в десятичной записи.

3 ⟨ii⟩. Лесом называется граф, компонентами связности которого являются деревья. Найти количество вершин в лесу, содержащем 100 рёбер и 50 компонент связности. Ответом должно быть число в десятичной записи.

Решение.

3 $\langle \mathrm{i} \rangle$. $2019 - 100 = 1919$.

3 $\langle \mathrm{ii} \rangle$. $100 + 50 = 150$.

Для неориентированных графов без циклов верна формула (число вершин) = (число ребер) + (число компонент связности).

□

Критерии.

1. 0 баллов за неверный ответ

4 $\langle \mathrm{i} \rangle$ (2). Найдите число правильных раскрасок графа-звезды на 11 вершинах в три цвета.

4 $\langle \mathrm{ii} \rangle$. Найдите количество независимых множеств в графе-звезды на 2019 вершинах.

Решение.

4 $\langle \mathrm{i} \rangle$. Красим центр в любой из трех цветов, после этого для каждого листа независимо есть 2 варианта их покраски, ответ $3 \cdot 2^{10}$.

4 $\langle \mathrm{ii} \rangle$. Есть ровно 1 независимое множество, содержащее центр звезды, и 2^{2018} независимых множеств, состоящих из листьев звезды (учитывая пустое множество).

□

Критерии.

1. 0 баллов, если ответ и формула неверные
2. 1 балл, если формула верная, а ответ неверный (вследствие арифметической ошибки) или отсутствует
3. Ответы 2^{2018} и $1 + 2^{2018}$ засчитываются как верные во втором варианте (пустое множество допустимо считать и допустимо не считать независимым)

5 $\langle \mathrm{i} \rangle$(3). Сколькими способами из полной колоды (36 карт) можно выбрать 7 карт так, чтобы все 4 масти в этом наборе оказались представлены хотя бы по разу? Считайте выборки упорядоченными.

5 $\langle$ii$\rangle$. Найдите число способов расставить 6 ладей на поле 4×15 так, чтобы в каждом столбце стояла хотя бы одна ладья. Ладьи считаются одинаковыми.

Решение.

5 $\langle$ii$\rangle$. Существует два принципиально разных варианта распределения ладей по строкам: $1+1+1+3$ и $1+1+2+2$. Расстановок, соответствующих первому распределению, $\binom{4}{1}$ (выбор строки с тремя ладьями) $\binom{\cdot 15}{3}$ (выбор позиций трех ладей в этой строке) $\cdot 15^3$ (выбор по одной позиции для ладьи в остальных трех строках). Расстановок, соответствующих второму распределению, $\binom{4}{2}$ (выбор строк с двумя ладьями) $\cdot\binom{15}{2}^2$ (выбор двух позиций для ладей в этих строках) $\cdot 15^2$ (выбор по одной позиции для ладьи в остальных двух строках). Итого $\binom{4}{1}\cdot\binom{15}{3}\cdot 15^3+\binom{4}{2}\cdot\binom{15}{2}^2\cdot 15^2=21026250$.

5 $\langle$i$\rangle$. Решим для неупорядоченного набора карт. В каждой масти 9 разных достоинств. Существует три принципиально разных варианта распределения карт по мастям: $1+1+1+4$, $1+1+2+3$ и $1+2+2+2$. Аналогично второму варианту разбираем все варианты: $\binom{4}{1}\cdot\binom{9}{4}\cdot 9^3+\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{9}{3}\cdot\binom{9}{2}\cdot 9^2+\binom{4}{1}\cdot\binom{9}{2}^3\cdot 9=4986360$. Упорядоченных наборов в $7!$ раз больше.

Задача в обоих вариантах имеет изящное решение через формулу включений-исключений, которая не входит в тему этой контрольной. $\square$

Критерии.

1. 0 баллов, если ответ и формула неверные
2. 2.5 балла, если формула верная, а ответ неверный (вследствие арифметической ошибки)
3. В первом варианте ответ засчитывается как для упорядоченного выбора, так и для неупорядоченного

Приведите определение и обоснованно ответьте на вопрос.

Общий критерий: определение стоит 1 балл, остальная часть задачи 2.

6 $\langle$i$\rangle$ (3). Дерево. Верно ли, что если в графе число вершин на единицу больше, чем число ребер, то граф — дерево?

6 $\langle \text{ii} \rangle$. Степень вершины. В клетчатом листе 2019 на 2019 закрасили несколько клеток. Могло ли так оказаться, что все клетки имеют нечетное число закрашенных соседей? Соседними считаются клетки с общей границей, в том числе по диагонали.

Решение. **6** $\langle \text{i} \rangle$. Утверждение неверно, достаточно привести контрпример. Подойдет, например, граф, состоящий из треугольника (полного подграфа на трёх вершинах) и не связанного с ним отрезка (полного подграфа на двух вершинах). Такой граф не связен и содержит цикл, поэтому деревом не является, но удовлетворяет условию.

6 $\langle \text{ii} \rangle$. Задача исключена из общего списка баллов (оставлен только вопрос на определение). $\square$

Критерии.

1. 1 балл за опредение

2. 2 балла за задачу в первом варианте. В случае неверного ответа задача оценивается в 0 баллов независимо от приведенных рассуждений

3. Задача во втором варианте не оценивается, т. к. она оказалась слишком сложной

7 $\langle \text{i} \rangle$(3). Инъекция. Найдите число инъекций из множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2019\}$ в множество $\{1, 2, 3, \ldots, 2007\}$. Ответом должно быть число в десятичной записи.

7 $\langle \text{ii} \rangle$. Сюръекция. Найдите число сюръекций из множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2019\}$ в множество $\{1, 2, 3, \ldots, 2020\}$. Ответом должно быть число в десятичной записи.

Решение. **7** $\langle \text{i} \rangle$. Требуется найти число инъекций из $X = \{1, 2, \ldots, 2019\}$ в $Y = \{1, 2, \ldots, 2007\}$. Заметим, что если для любых $x_1, x_2 \in X$ их образы различны, то образов должно быть по крайней мере 2019, что больше, чем $|Y|$. Поэтому таких инъекций попросту нет. Ответ: 0.

7 $\langle \text{ii} \rangle$. Требуется найти число сюръекций из $X = \{1, 2, \ldots, 2019\}$ в $Y = \{1, 2, \ldots, 2020\}$. Заметим, что если для любого $y \in Y$ существует хотя бы один прообраз $x \in X$, то элементов в X должно быть по крайней мере 2020, что больше, чем $|X|$. Поэтому таких сюръекций попросту нет. Ответ: 0. $\square$

Критерии.

1. 1 балл за опредение
2. 2 балла за задачу. В случае неверного ответа задача оценивается в 0 баллов независимо от приведенных рассуждений.

8 $\langle \mathrm{i} \rangle$ **(3)**. Законы де Моргана. Докажите, что если $A \cap (B \cup \overline{C}) = \overline{A} \cup D$, то $\overline{A} \cup (\overline{B} \cap C) = A \cap \overline{D}$.

8 $\langle \mathrm{ii} \rangle$. Законы де Моргана. Докажите, что если $A \cup (B \cap \overline{C}) = \overline{A} \cap D$, то $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C) = A \cup \overline{D}$.

Решение. 8 $\langle \mathrm{i} \rangle$. Возьмём данное нам тождество $A \cap (B \cup \overline{C}) = \overline{A} \cup D$ и перейдем к дополнению от обеих частей: $\overline{A \cup (B \cap \overline{C})} = \overline{\overline{A} \cup D}$. Прямое применение правила де-Моргана сразу приводит к требуемому.

8 $\langle \mathrm{ii} \rangle$. Возьмём данное нам тождество $A \cup (B \cap \overline{C}) = \overline{A} \cap D$ и перейдем к дополнению от обеих частей: $\overline{A \cup (B \cap \overline{C})} = \overline{\overline{A} \cap D}$. Прямое применение правила де-Моргана сразу приводит к требуемому. $\square$

Критерии.

1. 1 балл за опредение. Определение принимается в в форме для множеств и в форме для булевых функций
2. 2 балла за задачу
3. Если переход от множеств к булевым функциям был сделан без пояснений, то снимается 0.5 балла. В случае, если по обозначениям очевидно, что переход был к характеристической функции множества ($A \to f_A$), 0.5 не снимается

Приведите обоснованные решения

9 ⟨i⟩ (5). Сколькими способами можно выложить в ряд 25 красных, 25 синих и 25 зелёных шаров, так чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?

9 ⟨ii⟩. Сколькими способами можно выложить в ряд 25 красных, 25 синих и 100 зелёных шаров так, чтобы из любых соседних шаров хотя бы один был зелёный.

Решение. **9** ⟨i⟩. Синие шары считаем перегородками, раскладываем их

в 51 промежуток между остальными 50 шарами так, чтобы никакие две перегородки не стояли рядом. Это можно сделать $\binom{51}{25}$. Затем нужно выбрать из 50 оставшихся шаров, какие будут красными, а какие зелёными: $\binom{50}{25}$ способов. По правилу произведения получаем ответ: $\binom{51}{25} \cdot \binom{50}{25}$.

9 ⟨ii⟩. Красные и синие шары считаем перегородками, раскладываем их в 101 промежуток между 100 зелёными шарами так, чтобы никакие две перегородки не стояли рядом. Это можно сделать $\binom{101}{50}$ способами. Затем нужно выбрать из 50 перегородок, какие будут синими шарами, а какие красными: $\binom{50}{25}$ способов. По правилу произведения получаем ответ: $\binom{101}{50} \times \binom{50}{25}$. □

Критерии.

1. 0 баллов, если ответ и формула неверные
2. 4.5 балла, если формула верная, а ответ неверный (вследствие арифметической ошибки)
3. решения, в которых забыт множитель $\binom{50}{25}$, оцениваются максимум в 1 балл
4. верный ответ без объяснений: не более 2.5 балла

10 ⟨i⟩ (5). На окружности отмечены 2020 различных точек. Одна из этих точек синего цвета, а остальные — красного. Каких дуг окружности с концами в двух различных из этих 2020 точек больше: тех, на которых лежит синяя точка (в том числе, возможно, в качестве одного из концов), или остальных?

10 $\langle$ii$\rangle$. На окружности отмечены 2020 различных точек. Одна из этих точек синего цвета, а остальные — красного. Каких дуг окружности с концами в двух различных из этих 2020 точек больше: тех, которые содержат синюю точку среди внутренних (без учёта концов дуги), или остальных?

Решение. **10** $\langle$i$\rangle$. Дуг, не содержащих синюю точку, столько же, сколько дуг, содержащих синюю точку в качестве внутренней: биекцию между множествами таких дуг осуществляет переход к дополнительной дуге окружности на тех же концах. При этом во множестве дуг, содержащих синюю точку, остались еще дуги с концевой синей точкой, поэтому таких дуг больше.

10 $\langle$ii$\rangle$. Дуг, содержащих синюю точку в качестве внутренней, столько же, сколько дуг, не содержащих её и имеющих при этом обе красные концевые точки: биекцию между множествами таких дуг осуществляет переход к дополнительной дуге окружности на тех же концах. При этом во множестве дуг, не содержащих синюю точку, остались еще дуги, у которых синяя точка является одним из концов, поэтому таких дуг больше.

$\square$

Критерии.

1. 0 баллов, если ответ неверен
2. правильный ответ без объяснений стоит 0 баллов
3. верный подсчет числа дуг без объяснений: не более 2.5 балла
4. есть идея сопоставления пар дуг, содержащих внутри синюю точку и не содержащих: 1 балл

11 (5). Найдите количество всевозможных троек множеств $A, B, C \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, 8\}$, для которых выполняются условия $|A| = |B| = |C| = 4$ и $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 2$.

Решение.

$0 \leqslant |A \cap B \cap C| \leqslant |A \cap B| = 2$. Рассмотрим три варианта, чему может быть равно $|A \cap B \cap C|$:

1) $|A\cap B\cap C|=2$. Тогда $A\cap B\cap C=A\cap B=A\cap C=B\cap C$. Значит, в каждом множестве A, B, C есть по два уникальных элемента и еще два элемента, общих для всех трех множеств. Нам надо разбить 8 элементов на 4 группы по 2 элемента, это можно сделать $\frac{8!}{2!2!2!2!}$ способами.

2) $|A\cap B\cap C|=0$. Тогда $A\cap B, A\cap C, B\cap C$ попарно не пересекаются. Значит, каждое из множеств A, B, C состоит из двух пар элементов, по которым оно пересекается с двумя другими множествами. Еще есть два элемента, которые не входят ни в одно из A, B, C. Значит, нам снова нужно разбить 8 элементов на 4 группы по 2 элемента, это можно сделать $\frac{8!}{2!2!2!2!}$ способами.

3) $|A\cap B\cap C|=1$. Тогда $(A\cap B)\setminus C, (A\cap C)\setminus B, (B\cap C)\setminus A$ попарно не пересекаются и содержат по одному элементу. Кроме того, в каждом из множеств A, B, C есть по уникальному элементу, и есть элемент, который не входит ни в одно из A, B, C. Значит, нам нужно разбить 8 элементов на 8 групп по 1 элементу, это можно сделать $8!$ способами.

Итого $\frac{8!}{16}\cdot 2+8!=7!+8!$

$\square$

Критерии.

1. 1.5 балла за верно разобранный 1 случай из трех
2. 2.5 балла за верно разобранные 2 случая из трех
3. 3 балла за упомянутые три случая и ошибку в одном из них

12 (5). Существует ли такое отображение $f:\mathbb{N}_1\to\mathbb{N}_1$, что из любого связного (простого неориентированного) графа, в котором степень каждой вершины не меньше $f(k)$, при удалении любых k вершин (со всеми смежными рёбрами) получается связный граф?

Решение.

Такого отображения не существует. Достаточно показать, что при $k=1$ нужного $f(1)$ не существует. Покажем, что для произвольного d существует граф со степенями вершин $\geqslant d$, в котором при удалении некоторой вершины теряется связность: возьмем граф, состоящий из двух клик размера d, и еще одной вершиной A соединенной со всеми вершинами обеих клик. При удалении этой вершины потеряется связность, при этом степени всех вершин $\geqslant d$.

$\square$

Критерии.

1. 0 баллов, если ответ неверен

2. Снимаем 0.5 балла, если конструкция может иметь размер $k+1$, вследствие чего при удалении любых k вершин граф окажется связным

3. разбор частных случаев: 0 баллов

13(6). В стране из каждого города исходит не меньше $m \geqslant 2$ двусторонних автомобильных дорог и любые два города связаны не более чем одной дорогой. Докажите, что некоторый город лежит на кольцевом маршруте длины не меньше $m+1$, в котором все города разные, т. е. из города можно выехать в другой, из другого в третий и так далее, каждый раз отправляясь в новый город, и вернуться в конце маршрута из последнего города в первый. (Было неверно написано $m+1$-го.)

Решение.

Рассмотрим самый длинный (простой) путь в графе, такой найдется, потому что путей в конечном графе конечное количество. Первая вершина этого пути не может быть соединена ребром с вершиной, не принадлежащей этому пути, иначе этот путь был бы не самым длинным. Степень первой вершины $\geqslant m$, она не соединена с собой и соединена только с вершинами пути, значит, в пути найдется вершина с номером $t \geqslant m+1$, которая соединена с первой вершиной, тогда первые t вершин пути образуют цикл длины $\geqslant m+1$.

$\square$

Критерии.

1. Идея построения пути из вершин: 1 балл

2. Любые не доведенные решения, основанные на экстремальных по числу ребер примерах графов без циклов длины $m+1$, оцениваются в 0 баллов